

Algebra und Zahlentheorie.

Parker, W. V.: On symmetric determinants. Amer. Math. Monthly 41, 174—178 (1934).

Verf. beweist folgenden Satz: Sind in einer reellen nicht verschwindenden symmetrischen Determinante der Ordnung 5 alle Elemente der Hauptdiagonale Null und sind auch die zu 4 von diesen Elementen gehörigen Hauptminoren gleich Null, so kann der Hauptminor, der zu dem übrigen Element der Hauptdiagonalen gehört, nicht verschwinden. — Ähnliche Sätze gelten auch für 3- und 4-reihige Determinanten.

Wegner (Darmstadt).

Voss, Aurel: Über orthogonale Systeme. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 3, 373 bis 402 (1933).

An orthogonaloid system of equations is of the form

$$x_{k1}x_{l1} + x_{k2}x_{l2} + \dots + x_{kn}x_{ln} = a_{kl} \quad (k, l = 1, \dots, n).$$

Explicit general solutions for the complex field are given for $n = 2, 3, 4, 5$ and a method outlined for $n > 5$. These results specialize to Cayley's formula for an orthogonal matrix when $n = 3$ and $a_{kl} = \delta_{kl}$.

MacDuffee (Columbus).

König, Karl: Die Vektormatrizen als Verallgemeinerung der Quaternionen. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 232—237 (1934).

§ 1. Konstruktion eines neuen Bereiches aus zwei gegebenen. Sind B und B^* zwei Bereiche mit doppelter Verknüpfung: assoziativer, kommutativer und eindeutig umkehrbarer Addition, und beiderseits distributiver Multiplikation, so bilden die geordneten Paare (b, b^*) einen Modul, wenn $(b_1, b_1^*) + (b_2, b_2^*) = (b_1 + b_2, b_1^* + b_2^*)$ gesetzt wird. Besteht zwischen den Elementen von B und B^* keine Beziehung, so kann nur komponentenweise multipliziert werden. Im anderen Falle kann als Produkt ein Paar $F(b_1, b_1^*, b_2, b_2^*), F^*(b_1, b_1^*, b_2, b_2^*)$ eingeführt, und der Multiplikation noch weitere Forderungen auferlegt werden. — § 2. Die Quaternionen. Diese entstehen in der vorhin gezeigten Weise aus den Bereichen: Körper K und einem Bereich B^* dreidimensionaler Vektoren über K . Für zwei solche Paare $q = \{\gamma, c\}$ und $q' = \{\gamma', c'\}$ gilt wegen der Distributivität $qq' = \{\gamma\gamma', \gamma c' + \gamma' c\} + \{\mu c \cdot c', \mu' c' \times c\}$ (\cdot innere, \times vektorische Multiplikation). Sollen keine Nullteiler auftreten, so muß $\mu < 0$ sein; soll die Multiplikation assoziativ sein, so muß $\mu = -\mu'^2$ sein. Die einfachste Annahme ist $\mu = -1, \mu' = +1$. Statt $\{\gamma, c\}$ werde nun die Matrixschreibweise eingeführt $\begin{pmatrix} \gamma c \\ c \gamma \end{pmatrix}$. Dann lautet die Multiplikationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} \gamma c \\ c \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' c' \\ c' \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \gamma' - c \cdot c' & \gamma c' + c \gamma' \\ c \gamma' + \gamma c' & -c \cdot c' + \gamma \gamma' \end{pmatrix};$$

sie ist bei einer gewissen Ähnlichkeit von der für Matrizen verschieden. § 3. Die Vektormatrizen. Wird nun $\gamma = \alpha + \beta, c = a + b$, gesetzt, so läßt sich die Quaternion $\begin{pmatrix} \gamma c \\ c \gamma \end{pmatrix}$ als Summe von $\begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \beta b \\ \alpha a \end{pmatrix}$ ansetzen. Hierbei sind α und a noch beliebig wählbar. Wird von der Multiplikation verlangt, daß sie wenigstens in dem besonderen Fall, daß zwei Faktoren gleich sind, assoziativ wird, so findet sich eine Multiplikationsvorschrift, die der in § 2 genau entspricht. Die Ergebnisse lassen sich noch mit denen von Zorn (dies. Zbl. 7, 54) in Zusammenhang bringen.

L. Schrutka (Wien).

Zia-ud-Din: On determinantal symmetric functions. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 47—52 (1934).

Es werden Sätze über die Darstellung isobarer Determinanten durch Bi-Alternanten und allgemeiner Beziehungen zwischen Identitäten unter isobaren Determinanten

nanten und Identitäten unter Alternanten und monomischen symmetrischen Funktionen aufgestellt. Alternanten werden bekanntlich die Determinanten $|a_i^{j_k}|$ genannt; unter Bi-Alternanten werden nach Muir die Quotienten von Alternanten durch die besondere Alternante, die als Vandermondesche Determinante bekannt ist, verstanden. Unter anderem wird an den Aufsatz von Aitken, dies. Zbl. 1, 114 angeknüpft. Die Ergebnisse lassen sich nicht gut in kurzen Worten wiedergeben. *L. Schrutka.*

Berwald, Ludwig: Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Acta Litt. Sci. Szeged 6, 209—221 (1934).

Verf. beweist durch elementare Schlüsse eine Reihe von Abschätzungen für die Beträge der Wurzeln gegebener algebraischer Gleichungen sowie für einige Mittelwerte dieser Beträge. Satz I verschärft ein Resultat von Cohn [Math. Z. 14, 143 (1922)], Satz II ein Resultat von Lipka [Acta Litt. Sci. Szeged 3, 73—80 (1927)]. Die weiteren Sätze schließen sich an den letzten an und besagen die Existenz von einer gewissen Mindestanzahl von Wurzeln in Kreisen, deren Radien auf leicht angebbare Weise von den Koeffizienten der Gleichung abhängen. Vorausgesetzt sind dabei allerdings gewisse (in den Anwendungen wohl nur umständlich verifizierbare) Ungleichheitsbeziehungen zwischen den Wurzelbeträgen. *Szegö (Königsberg i. Pr.).*

Rudnicki, J.: Remarque sur un théorème de Mr. Walsh. Mathematica, Cluj 8, 136 bis 138 (1934).

Vgl. dies. Zbl. 8, 99.

Walsh, J. L.: Note on the location of the roots of the derivative of a polynomial. Mathematica, Cluj 8, 185—190 (1934).

Unveränderter Nachdruck der in dies. Zbl. 8, 291 referierten Arbeit des Verf.

Sz. Nagy (Szeged).

Biernacki, M.: Sur l'équation du troisième degré. Mathematica, Cluj 8, 196—200 (1934).

An eine Arbeit von P. Sergescu (dies. Zbl. 6, 5) anschließend beweist Verf. den folgenden Satz: Die Gleichung $f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a = 0$, wo $|a_1| \geq |a_i|$ ($i = 0, 2, 3$) ist, hat immer eine Wurzel vom absoluten Betrage $\leq \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ und zwei Wurzeln vom absoluten Betrage ≤ 3 . Diese zwei oberen Schranken lassen sich im allgemeinen nicht verkleinern. Sind die Koeffizienten von $f(x)$ reell, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ — nach einer Bemerkung von T. Popoviciu — auch im Kreise $|x| \leq 1$ mindestens eine Wurzel. *Sz. Nagy (Szeged).*

Gut, Max: Über die Primideale im Wurzelkörper einer Gleichung. Comment. math. helv. 6, 185—191 (1934).

The degree of prime ideals in the relative Galois field K generated by all roots of an algebraic equation $f(x) = 0$ is determined for ideals prime to the relative discriminant of K . If $f(x)$ decomposes mod p^N for sufficiently large N into normal prime polynomials of degree f_i the degree of the prime ideal divisors of p in K is the least common multiple of the f_i . *Engström (New Haven).*

Szegö, Gabriel: Bemerkungen zu einem Satz von E. Schmidt über algebraische Gleichungen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 8, 86—98 (1934).

Verf. verschärft einen Satz von E. Schmidt und zugleich die von I. Schur herührende Verschärfung dieses Satzes (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933; dies. Zbl. 7, 1). Hat die algebraische Gleichung n -ten Grades

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0 \quad (1)$$

mit $a_0 a_n \neq 0$ r reelle Wurzeln, von denen p positiv und q negativ sind, und sind $M = |a_0 a_n|^{-\frac{1}{2}} \max_{|z|=1} |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n|$, $P = |a_0 a_n|^{-\frac{1}{2}} (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|)$, so beweist Verf. die Ungleichung $r(r+1) + (p-q)^2 < 4(n+1) \log M \leq 4(n+1) \log P$ und zeigt, daß man hier die Konstante 4 durch keine kleinere ersetzen kann. Der Beweis geschieht durch Anwendung gewisser einfacher Eigenschaften der Jacobischen

Polynome. — Im zweiten Teil gibt Verf. eine neue kurze Herleitung der Schurschen Resultate über die Größe $Q = |a_0 a_n|^{-\frac{1}{2}} (|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Es stellt sich heraus, daß auch die von Schur berechneten Extremalpolynome $f(z)$, die bei vorgegebenen n , p und q das genaue Minimum Q annehmen, aufs engste mit den Jacobischen Polynomen zusammenhängen. Verf. untersucht auch die Aufgabe, das Minimum des

Ausdruckes $|a_0 a_n|^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) |f(z)|^2 d\vartheta$ ($z = e^{i\vartheta}$), wo $g(\vartheta)$ eine vorgegebene Belegungsfunktion des Einheitskreises bedeutet und $f(z)$ ein beliebiges Polynom n -ten Grades von der Form (1) ist, zu berechnen.

Sz. Nagy (Szeged).

Chaundy, T. W.: On the number of real roots of a quintic equation. Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 10—22 (1934).

Verf. gibt eine geometrische Herleitung der Bedingungen dafür, daß eine Gleichung (vierten und) fünften Grades eine bestimmte Anzahl reeller Wurzeln hat. Seine Bedingungen sind unabhängig und einfacher als die früher aufgestellten. — Er betrachtet die Gleichung fünften Grades in reduzierter „standard form“:

$$t^5 + 10 A_2 t^3 + 10 A_3 t^2 + 5 Y t + X = 0 \quad (1)$$

und faßt t als Parameter und die Koeffizienten x, y als kartesische Koordinaten einer Ebene auf. Die sich so ergebende Geradenschar hat die Envelope $\Delta = 0$, wobei Δ die Diskriminante der Gleichung bedeutet. Die Gleichung dieser Envelope kann in folgender Parameterform geschrieben werden: $x = 4 t^5 + 20 A_2 t^3 + 10 A_3 t^2$, $y = -t^4 - 6 A_2 t^2 - 4 A_3 t$. Die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (1) für ein bestimmtes Wertesystem von x, y ist gleich der Anzahl der durch den Punkt (x, y) hindurchgehenden reellen Tangenten an diese Envelope. Die Envelope zerlegt die Ebene in eine Anzahl von Bereichen, in denen die Punkte (x, y) sich verschiedenartig verhalten. Um diese Bereiche analytisch zu bestimmen, sucht der Verf. die sich auf der Envelope befindenden reellen Doppelpunkte und Rückkehrpunkte. Die Gestalt der Envelope kann je nach den Werten von A_2, A_3 von dreierlei Art sein: I. Ist $4 A_2^3 + A_3^2 > 0$, so hat die Kurve keinen Doppelpunkt und einen Rückkehrpunkt. — II. Ist $4 A_2^3 + A_3^2 < 0 < 8 A_2^3 + 27 A_3^2$, so hat die Kurve einen Doppelpunkt und drei Rückkehrpunkte. — III. Ist $8 A_2^3 + 27 A_3^2 < 0$, so hat die Kurve drei Doppelpunkte und drei Rückkehrpunkte. — Im ersten Falle werden die Bereiche schon durch das Vorzeichen von Δ bestimmt. In den übrigen Fällen führt der Verf. die Hyperbel $\theta = x^2 + 16 A_2 y^2 - 76 A_2 A_3 x - (272 A_2^3 - 108 A_3^2) y + 24 A_2^2 (40 A_2^3 + 27 A_3^2) = 0$ ein, die durch die (evtl. imaginären) Doppelpunkte hindurchgeht und den Bereich „mit fünf reellen Wurzeln“ vom Bereich „mit einer reellen Wurzel“ trennt. — Der Verf. faßt seine Resultate in folgender Tabelle zusammen:

I. Fünf reelle Wurzeln:	$\Delta \geq 0, 4 A_2^3 + A_3^2 < 0, \theta \leq 0, \}$
	$\Delta = 0, 4 A_2^3 + A_3^2 = 0, \theta = 0. \}$
II. Drei reelle Wurzeln: $\Delta < 0$;	$\Delta = 0, 4 A_2^3 + A_3^2 > 0; \}$
	$\Delta = 0, 4 A_2^3 + A_3^2 = 0, \theta \neq 0; \}$
	$\Delta = 0, 4 A_2^3 + A_3^2 < 0, \theta > 0. \}$
III. Eine reelle Wurzel:	$\Delta > 0, 4 A_2^3 + A_3^2 \geq 0; \}$
	$\Delta > 0, 4 A_2^3 + A_3^2 < 0, \theta > 0. \}$

N. Tschebotaröw (Kasan).

Dorwart, H. L., and O. Ore: Criteria for the irreducibility of polynomials. Ann. of Math., II. s. 35, 195 (1934).

Die Arbeit enthält einige Bemerkungen von Spitz über die Ausnahmefälle in der Arbeit der Verff. „Criteria for the irreducibility of polynomials“ [Ann. of Math., II. s. 34, 81 (1933); siehe auch dies. Zbl. 6, 4].

Wegner (Darmstadt).

Plemelj, Josef: Die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung. Publ. Math. Univ. Belgrade 2, 164—165 (1933).

Besonders einfacher und kurzer Beweis für die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für die primitiven p^k -ten Einheitswurzeln (p Primzahl). Der Beweis steht im Ansatz dem von Kronecker (Werke 1, 99—102) nahe, kürzt aber einen Umweg von Kronecker ab.

Bessel-Hagen (Bonn).

Vinogradov, I.: On the distribution of primitive roots. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 366—369 u. engl. Zusammenfassung 369 (1934) [Russisch].

Verf. setzt in dieser Note die Erwägungen fort, welche er in den Noten 1) New applications of trigonometrical polynomes und 2) New asymptotical expressions (vgl.

dies. Zbl. 8, 302) dargestellt hat. Bezeichnet $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{p-1}}$ und $\varrho^{k \text{ ind } z + n} = 0$, wo p eine Primzahl > 7 und z durch $p-1$ teilbar ist, so erhält Verf.

$$|S| = \left| \sum_{x=1}^{p-1} \varrho^{a \text{ ind } x + b \text{ ind } (x+h) + c \text{ ind } (x+k)} \right| \leq \frac{7}{4} p^{\frac{1}{2}}$$

und mittels einfacher Erwägungen auch die folgenden Sätze: For the number T of cases when 1. $\text{ind } x \equiv u \pmod{k}$; $\text{ind } (x+q) \equiv v \pmod{m}$; $\text{ind } (x+s) \equiv w \pmod{n}$

simultaneously, we have: $T = \frac{p}{kmn} + \theta 2p^{\frac{1}{2}}$ ($-1 < \theta < 1$), 2. $x, x+q, x+s$ are primitive roots, we have: $T = p \left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1} \right)^3 + \theta 2^{3\sigma+1} p^{\frac{1}{2}}$ ($-1 < \theta < 1$),

where σ is the number of the prime divisors of $p-1$. — Einige Berichtigungen: S. 366, Z. 11 oben: statt $p^{k \text{ ind } z + n}$ lies $\varrho^{k \text{ ind } z + n}$; S. 367, Z. 3 oben: die Summation sollte entsprechend geändert, zuerst nach s und dann nach w durchgeführt werden;

S. 367, Z. 11 oben: statt $|S| < \frac{7}{4} p^{\frac{1}{2}}$ lies $|S| < \frac{7}{4} p^{\frac{1}{2}}$ usw. *Lubelski* (Warszawa).

Vinogradov, I.: Nouveaux théorèmes sur la distribution des résidus quadratiques. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 289—290 u. franz. Zusammenfassung 290 (1934) [Russisch].

Verf. gibt mit elementaren Mitteln eine Abschätzung der Summen

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{p} \right) \right|, \quad \left| \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}{p} \right) \right|,$$

wo $\left(\frac{t}{p} \right)$ Legendresche Symbole bezeichnet. Ref. muß betonen, daß Verallgemeinerungen dieser Sätze 1. bei H. Davenport, dies. Zbl. 1, 123 und auch 2. bei H. Salé, dies. Zbl. 7, 397 zu finden sind.

Lubelski (Warszawa).

Mirimanoff, D.: L'équation $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$ et la courbe $x^3 + y^3 = 1$. Comment. math. helv. 6, 192—198 (1934).

This paper is concerned with the solutions of the equation (1) $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$ in certain quadratic fields $K(\sqrt{m})$. Transformations have been discovered by Burnside and Fueter which enable one to deduce an infinity of solutions from a single solution. In this paper these transformations are found in a very simple way by applying Sylvester's method of "residuation" to the cubic curve (2) $x^3 + y^3 = 1$. In fact, if (1) has a solution in $K(\sqrt{m})$ then it has a solution in which ζ is a rational integer. Then the equations $x = -\xi/\zeta$, $y = -\eta/\zeta$ bring into correspondence the solutions of (1) with points (x, y) of the curve (2), where x and y are conjugates in $K(\sqrt{m})$. Setting $x + y = u/v$, where u and v are rational integers, the solutions of (1) may be expressed in terms of the parameters (u, v) . — Starting with a solution of (1), we derive a point (x_0, y_0) on (2). The tangent at this point meets the cubic again at a new point (x_1, y_1) . This provides a new solution of (1). Also we may join the point (y_1, x_1) to (x_0, y_0) by a line cutting (2) in a new point, and hence derive another solution of (1). These two transformations, of degrees 4 and 9 respectively, are those of Burnside and Fueter. Analogous transformations are considered. Fueter has given necessary

conditions in terms of the class-number of $K(\sqrt{m})$ in order that (1) should have at least one solution. Consequences of these conditions are given in terms of the parameters (u, v) .

D. H. Lehmer (Princeton).

Obálth, Richard: Sur la distribution des nombres premiers. Mat. fiz. Lap. **41**, 41—44 (1934) [Ungarisch].

Le contenu de la note est la démonstration du théorème suivant. Pour x assez grand, chaque intervalle de la suite $\langle 1, \dots, x \rangle, \langle x, \dots, 2x \rangle, \dots, \langle (n-1)x, \dots, nx \rangle$ contient moins de nombres premiers que l'intervalle précédent, si l'on a $n < \log^m x$, où m désigne un nombre entier quelconque. — La démonstration est fondée sur le théorème des nombres premiers, sous la forme qu'a donnée à ce théorème M. Littlewood.

Autoreferat.

Ricci, Giovanni: Su un teorema di Techebychef-Nagell. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **12**, 295—303 (1934).

Let $F(x)$ denote an irreducible polynomial in x with integral coefficients and of degree g where $g > 1$. Let a denote 1 or $1/2$ according as g is odd or even. Let P_x denote the maximum prime divisor of the product $F(1)F(2)\dots F(x)$. Then it is shown that

$$\max_{x=+\infty} \lim \frac{x \log x}{P_x} \leq \frac{ag}{g-1}.$$

The upper bound ag^2 for this maximum limit had been previously obtained by T. Nagell. The foregoing theorem is established by aid of the following: If δ is any positive number less than $(g-1)/(ag)$ and if $N_\delta(x)$ is the number of distinct prime factors of $F(1)F(2)\dots F(x)$, each of which is greater than $\delta x \log x$, then

$$N_\delta(x) \geq \frac{1}{g} \left(\frac{g-1}{ag} - \delta \right) x + o(x).$$

It is also proved that

$$\frac{g-1}{ag^2} x + o(x) \leq A(x) \leq (g-1)x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

where $A(x)$ is the number of distinct prime factors of the product $F(1)F(2)\dots F(x)$. It is stated that the central theorem may be extended in an obvious manner to the product

$$F([ex] + 1) \cdot F([ex] + 2) \cdot \dots \cdot F(x), \quad 0 \leq \varepsilon < 1,$$

and that (with an evident notation) we have

$$N_{\delta, \varepsilon}(x) \geq \frac{1}{g} \left\{ \frac{(1-\varepsilon)(g-1)}{ag} - \delta \right\} x + o(x).$$

R. D. Carmichael (Urbana).

Romanoff, N.: Über zwei Sätze der additiven Zahlentheorie. Rec. math. Moscou **40**, 514—520 u. dtsch. Zusammenfassung 520 (1933) [Russisch].

$p_0 < p_1 < \dots$ sei eine unendliche Folge P von Primzahlen; in P mögen für $x > p_0$ mindestens $c_1(P)x/\log x$ Zahlen $\leq x$ auftreten (die c sind positive Konstanten, die nur von den beigefügten Argumenten abhängen dürfen). Alle im folgenden genannten Zahlen seien ganz. — Hauptsätze: I. Für $x > p_0$ und festes $n > 0$ lassen sich mindestens $c_2(n, P)x$ Zahlen $\leq x$ in der Form $a^n + p$ ($a > 0$, p in P) darstellen. II. Für $x > p_0$ und festes $a > 1$ lassen sich mindestens $c_3(a, P)x/\log \log x$ Zahlen $\leq x$ in der Form $a^n + p$ ($n \geq 0$, p in P) darstellen. — Die Beweise werden elementar geführt. Das wesentliche Hilfsmittel bildet beidemale der Satz von Schnirelmann-Landau: „Die Gleichung $q_1 - q_2 = u$ läßt sich bei festem $u > 0$ durch höchstens

$$c_4 \sum_{p|u} \left(1 + \frac{1}{p}\right) x/\log^2 x$$

Primzahlpaare q_1, q_2 mit $q_1 \leq x, q_2 \leq x$ auflösen“ (in Σ durchläuft p alle Primzahlteiler von u). Außerdem wird noch die Abschätzung $\pi(x) < c_5 x/\log x$ für die Anzahl aller Primzahlen $\leq x$ benutzt. — Bei der Anwendung liegt es nahe, für P die Menge aller

Primzahlen zu wählen. Die Voraussetzung $\pi(x) > c_1 x / \log x$ läßt sich dann sogar elementar nachweisen. Man kann aber auch für P etwa die Menge aller p in der Linearform $Ax + B$ (mit $(A, B) = 1, A > 0$) oder in der quadratischen Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ (mit $(A, B, C) = 1, D = B^2 - 4AC$ kein Quadrat, $A > 0$ für $D < 0$) nehmen, wobei aber die diesbezügliche Voraussetzung nur auf analytischem Wege nachzuprüfen ist.

— Zum Beweise von I: Die S. 516, Zeile 11, benutzte Ungleichung $[x^{1/n}] \left(\left[\frac{x^{1/n}}{k} \right] + 1 \right) \leq 2x^{1/n}/k$ muß für $k > x^{1/n}$ durch $\dots \leq x^{1/n}$ ersetzt werden. Es tritt dann dort das Zusatzglied $2c_8(n, P) \sum_{k \leq x} \frac{\Phi(k) \mu^2(k)}{k}$ auf. Da aber aus den Rechnungen S. 317 und

einem älteren Primzahlsatz $\Phi(k) < c_7(\varepsilon, k) k^\varepsilon$ folgt, so ist jenes Zusatzglied unerheblich. — Beim Beweise von II kommt der Ausdruck $S(x) = \sum_{k \leq x} \frac{1}{kl(k)}$ vor, wo-

bei nur über quadratfreie, zu a teilerfremde k summiert wird und $l(k)$ das kleinste $l > 0$ mit $a^l \equiv 1 \pmod{k}$ bedeutet. Wegen $l(k) > c_8 \log k$ ist $S(x) < c_9 \log \log x$. Jedes bessere Ergebnis für $S(x)$ würde auch II entsprechend verschärfen. Ließe sich sogar die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \dots$ nachweisen, so würde die Behauptung, ähnlich wie in I, lauten: mindestens $c_3(a, P)x$ Zahlen.

A. Walfisz (Radoś, Polen).

Analysis.

● Kowalewski, Gerhard: Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen. Bd. 3. Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1933. 252 S. RM. 3.80.

Pompeiu, D.: Généralisations du théorème de la moyenne. Bull. Sci. math., II. s. 58, 80—89 (1934).

Verallgemeinerungen und elementare Beweise einiger Mittelwertsätze, wie z. B.: Ist $f(x)$ stetig in (a, b) , so existieren drei Punkte x_i in (a, b) derart, daß

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x) dx$$

wird, wo $p(x)$ das Lagrangesche Interpolationspolynom $\{p(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, 3\}$ zweiten Grades ist.

Karamata (Beograd).

Sibirani, F.: Sull' interpolazione della curva logistica generalizzata. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 81—84 (1934).

Si indica il modo più rapido per la determinazione dei parametri nell' interpolazione della funzione $y = k[1 + e^{F(x)}]^{-1}$ ove $F(x)$ è una funzione razionale intera di grado n .

Autoreferat.

Serra Caracciolo, Maria: Sui polinomi definiti. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 3, 161—170 (1934).

Fortsetzung der Untersuchungen, über die in dies. Zbl. 6, 5 berichtet wurde. Ein Polynom, das definit oder semidefinit ist, und dessen ungerade Potenzen lauter Koeffizienten mit gleichem Vorzeichen haben, bleibt definit oder semidefinit, wenn die Vorzeichen dieser Koeffizienten, alle oder einige in beliebiger Auswahl, geändert werden. Weitere Sätze werden durch Anwendung der assoziierten Formen von Cherubino (s. dies. Zbl. 3, 293) gewonnen. Beispiele.

L. Schrutka (Wien).

Takahashi, Tatsuo: A theorem on Cesàro summability. Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 8—9 (1934).

Le résultat de M. Takahashi — sommabilité (C, δ) d'une série sommable (A) si l'on a en outre

$$\lim [s_n^{(\delta)} - s_m^{(\delta)}] \geq 0 \quad \left(\frac{n}{m} \rightarrow 1, \quad n > m \rightarrow \infty, \quad \delta > 0 \right)$$

où $s_n^{(\delta)}$ dénote la $n^{\text{ième}}$ moyenne arithmétique de la suite $\{s_n\}$ des sommes partielles de la série en question — généralise le théorème de M. Okada [Tôhoku Math. J. 38 (1933); ce Zbl. 8, 173]. Ce résultat énoncé pour tout $\delta > 0$ n'est démontré que pour $\delta = E(\delta)$ (positif et entier). D'ailleurs en utilisant au lieu du raisonnement de l'auteur un théorème de Kogbetliantz [voir Mém. Sci. math. 51, 37, form. (8)] d'après lequel une série sommable $(A) \cdot (C, \delta_0)$ l'est aussi $(A) (C, \delta)$ pour $\delta > \delta_0$, on complète facilement la preuve pour $\delta > 0$ quelconque entier ou non. Kogbetliantz (Téhéran).

Watanabe, Yoshikatsu: Über den Permanenzsatz Cesàroscher, sowie Hölderscher Limitierungsverfahren für mehrfache Integrale. Tôhoku Math. J. 38, 397—421 (1933).

Die Übertragung der Permanenzsätze der C - und H -Verfahren für Doppelfolgen und mehrfache Folgen [F. Lösch, Math. Z. 34, 281 (1931); dies. Zbl. 2, 335; S. Bochner, Math. Z. 35, 122 (1932); dies. Zbl. 4, 8] auf Doppelintegrale und mehrfache Integrale bietet insofern eine gewisse Schwierigkeit, als die dabei auftretenden Picardschen Integralgleichungen 1. Art sich nicht sämtlich nach der Volterraschen Methode lösen lassen. — Die Funktion $s(u, v)$ wird in jedem Bereich $0 \leq a \leq u \leq x$, $0 \leq b \leq v \leq y$ als meßbar und beschränkt vorausgesetzt, und es wird gebildet:

$$S(x, y) = \int_a^x \int_b^y \varphi_k(x, u) \psi_l(y, v) s(u, v) du dv,$$

wobei

$$\varphi_k(x, u) = \frac{k}{x^k} (x - u)^{k-1}, \quad \psi_l(y, v) = \frac{l}{y^l} (y - v)^{l-1} \quad \text{für Cesàrosche Mittel}$$

oder

$$\varphi_k(x, u) = \frac{(\lg x - \lg u)^{k-1}}{x \Gamma(k)}, \quad \psi_l(y, v) = \frac{(\lg y - \lg v)^{l-1}}{y \Gamma(l)} \quad \text{für Höldersche Mittel.}$$

„Wenn $\lim s(x, y) = s$ für $x, y \rightarrow \infty$, und wenn $S(x, y)$ beschränkt ist, dann folgt $\lim S(x, y) = s$ bei gebrochenen positiven Ordnungen k und l .“ Hier schließt sich eine Untersuchung des Falles positiver ganzzahliger Ordnungen an, deren Ergebnisse analog denen für Doppelfolgen sind. — Ferner: „Existieren $\lim s(x, y) = s$ und $\lim S(x, y) = S$ mit $x, y \rightarrow \infty$, so ist $s = S$.“

R. Schmidt (Kiel).

Karamata, J.: Einige weitere Konvergenzbedingungen der Inversionssätze der Limitierungsverfahren. Publ. Math. Univ. Belgrade 2, 1—16 (1933).

Die vom Verf. früher benutzten Konvergenzbedingungen verschiedener Limitierungsverfahren sind sämtlich von der Form: Wenn

$$(K_1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq x' \leq X} [f(x') - f(x)] \geq -w(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{bei } \varepsilon \rightarrow 0,$$

so kann man aus der Limitierbarkeit von $f(x)$ zum Grenzwert a auf $\lim f(x) = a$ schließen. Dabei hängt $X = X(x, \varepsilon)$ nur von der Form des Verfahrens ab. Jetzt wird (K_1) durch (K_2) ersetzt:

$$(K_2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq x' \leq X} \frac{1}{\varrho(x)} [\varrho(x') f(x') - \varrho(x) f(x)] \geq -w(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{bei } \varepsilon \rightarrow 0,$$

wobei $\varrho(x)$ nur von X abhängt. Spezialfälle. I. Aus

$$\int_x^{x+h} f(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{bei } x \rightarrow \infty$$

und beliebig kleinem h und (K_2) mit $X = x + \varepsilon$, $\varrho(x) = e^{cx}$, c beliebig reell, aber fest, folgt $f(x) \rightarrow 0$ bei $x \rightarrow \infty$. — II. Sei $f(x)$ von beschränkter Schwankung in jedem

endlichen Intervall und konvergiere $F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x} df(x)$ für $\sigma > 0$. Aus $F(\sigma) \rightarrow 0$

bei $\sigma \rightarrow 0$ und (K_2) mit $X = x(1 + \varepsilon)$, $\varrho(x) \uparrow$, $\varrho(\lambda x) = O[\varrho(x)]$ für ein $\lambda > 1$ und $\sum_{v=0}^n \varrho(x \lambda^{-v}) = O[\varrho(x)]$ mit $n = 1 + [\log x / \log \lambda]$ folgt $f(x) \rightarrow 0$ bei $x \rightarrow \infty$. An-

wendung auf Dirichletsche Reihen.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Kok, F. de: Über Fejérs Summierung der Fourierschen Reihe. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 88—91 (1934).

Es sei $f(x) \subset L$, $g(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $\psi(x, t) = \int_0^t g(x, u) du$, $D_n(t)$ der Dirichletsche, $F_n(t)$ der Fejérsche Kern. Ferner

$$\varrho_n(x) = \int_0^\pi g(x, t) F_n(t) dt,$$

$$I^{(n)}(x_0) = \int_0^\pi \psi(x_0, t) t^{-1} D_n(t) dt, \quad \text{wobei} \quad \psi(x_0, t)/t \subset L.$$

Dann gilt $\varrho_n(x_0) - \{2[I^{(0)}(x_0) + \dots + I^{(n)}(x_0)]/(n+1) - I^{(n)}(x_0)\} \rightarrow 0$,

d. h. besitzt $I^{(n)}(x_0)$ einen Grenzwert, dann hat $\varrho_n(x_0)$ denselben Grenzwert. Ferner, $\varrho_n(x_0) \rightarrow 0$, d. h. die Fejérschen Mittel konvergieren gegen $f(x_0)$, wenn

$$\int_0^t g(x_0, u) du = o(t) \quad \text{und} \quad \int_0^t |g(x_0, u)| du = O(t).$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

Beevers, C. A., and H. Lipson: A rapid method for the summation of a two-dimensional Fourier series. Philos. Mag., VII. s. 17, 855—859 (1934).

Friedrichs, Kurt: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. I. Math. Ann. 109, 465—487 (1934).

In this paper, the author develops the spectral theory of semi-bounded linear symmetric operators in real abstract Hilbert space. By new methods he obtains in a simple systematic manner results which are contained in, or are easily deducible from, the more complicated theories of non-bounded matrices and operators in complex Hilbert space developed by von Neumann, Wintner, F. Riesz, and Stone. The author bases his work on the following simple but hitherto unexploited observation: if G is a positive definite linear symmetric operator with domain \mathfrak{G} in a real Hilbert space with fundamental form (f, g) , then the form (f, Gg) defines a new metric in \mathfrak{G} under which \mathfrak{G} may be regarded as a dense linear subset of a second real Hilbert space; and the original form (f, g) , considered in \mathfrak{G} , is bounded relative to the new metric and, if \mathfrak{G} is a Hilbert space in the new metric, is therefore equal to the form (f, GBg) , where B is an operator which is defined in \mathfrak{G} and which is bounded, linear, and symmetric relative to either metric. The author proposes to apply his results in a second paper to the study of differential operators, both ordinary and partial. M. H. Stone.

Differentialgleichungen:

Conkwright, N. B.: The method of undetermined coefficients. Amer. Math. Monthly 41, 228—232 (1934).

Cartwright, M. L.: Mayer's method of solving the equation $dz = P dx + Q dy$. Math. Gaz. 18, 105—107 (1934).

Strutt, M. J. O.: L'équation différentielle de Hill dans le domaine complexe. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1008—1011 (1934).

The aim is to find a solution u of Hill's equation $H_z(u) \equiv u'' + \lambda u + \Phi(z)u = 0$ such that $u(z_1 + \omega) = \sigma u(z_1)$ where $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ and m and n are integers. Starting with particular solutions u, v such that $u(z_1) = 1$, $u'(z_1) = 0$, $v(z_1) = 0$, $v'(z_1) = 1$. The quantity σ is found to be given by an equation

$$\sigma^2 + \sigma[u(z_1 + \omega) + v'(z_1 + \omega)] + 1 = 0$$

and to be an invariant of $H_z(u) = 0$ depending only on ω, λ and Φ . The discriminant F of the equation for σ is likewise dependent only on λ, ω , and Φ , it is the product of the two quantities $u(\omega) + v'(\omega) \pm 2$ and is an entire function of λ . The nec. and suff. condition that λ should be stable is that F should be real and negative. — A study is made

of the curves in the complex λ -plane along which the real and imaginary parts of F respectively vanish. It appears that these curves cannot intersect themselves or end in the finite part of the plane. From the asymptotic solution of Hill's equation it follows that there is a denumerably infinite set of discrete characteristic values and it is found that they lie in a part of the λ -plane for which $|\lambda_2| < (\Phi_2)_{\max}$ and $-\lambda_1 > (\Phi_1)_{\max}$, where $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\Phi_1 + i\Phi_2$ and the maximum values indicated are those of the moduli of Φ_1 and Φ_2 along the path chosen from z to $z_1 + \omega$. — In studying the asymptotic distribution of the characteristic values in the above mentioned part of the λ -plane when λ_1 is large and positive it is found that the values all lie on a single curve for which the imaginary part of F is zero. As $\lambda_1 \rightarrow +\infty$ this 'asymptotic chain' tends to coincide with a portion of the positive real axis in the λ -plane. On the asymptotic chain two demi-periodic values of λ ($\sigma = -1$) are followed by two periodic values ($\sigma = 1$). The part of the chain between 2 characteristic values of the same kind corresponds to the unstable values of λ ($|\sigma| \neq 1$) while a part between two characteristic values of the same kind corresponds to stable values of λ ($|\sigma| = 1$). — A study is made also of a Hill equation with two parameters: $u'' + \lambda u + \gamma u \Phi(z) = 0$.

H. Bateman (Pasadena).

Erdélyi, Artur: Über die freien Schwingungen in Kondensatorkreisen mit periodisch veränderlicher Kapazität. Ann. Physik, V. F. 19, 585—622 (1934).

Die Theorie der im Titel erwähnten Schwingungen führt auf die Hillsche Differentialgleichung: $d^2u/dt^2 + (\lambda + \gamma f(t))u = 0$, wobei f eine periodische Funktion von t ist und $|f| \leq 1$ (vgl. Erg. Math. 1, H. 3). Nach einer Darlegung der bekannten allgemeinen Eigenschaften der Lösungen dieser Differentialgleichung bringt Verf. mathematisch folgende neue Formeln: 1. Die Lösungen in stabilen Lösungsgebieten für λ und γ groß und $\gamma \leq \lambda$. 2. Die Lösungen in labilen Lösungsgebieten unter den gleichen Bedingungen. 3. Die charakteristischen Exponenten für die erwähnten Fälle. 4. Berechnung der Breite der stabilen Intervalle von λ . 5. Ein Zahlenbeispiel für eine besondere Funktion f , bei der sich die Differentialgleichung explizite mittels Besselscher Funktionen lösen läßt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Mitra, S. C.: The operational representations of $D_n(x)$ and $(D_{-(n+1)}^2)(ix) - D_{-(n+1)}^2(-ix)$. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 33—35 (1934).

The functions $D_n(x)$ considered in this paper satisfy the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0.$$

Calling the function $\bar{\Phi}(p) = p \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx$ the operational representation of $f(x)$

the function $(-1)^n \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(n+1)2^n} \frac{p(p-1)^n}{(p+1)^{n+\frac{1}{2}}}$ is found to be the operational representation of $D_{2n+1}(x)$. Use is made of this operational representation to find an expansion of $\{D_{-(n+1)}(i\sqrt{2x}) - D_{-(n+1)}^2(-i\sqrt{2x})\}$ in terms of the functions $D_{2(n+p)+1}(x)$, $p = 0, 1, 2, \dots$

Murnaghan (Baltimore).

Ioneseo, D. V.: Le théorème de Fuchs. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 149—171 (1933).

Die lineare Differentialgleichung

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x) \quad (p_i(x) \text{ regulär für } x=0)$$

integriert Verf. in der Umgebung von $x=0$ nach der Methode der sukzessiven Approximationen, indem er von der linken Seite den Ausdruck

$$E(y) \equiv x^n y^{(n)} + x^{n-1} p_1(0) y^{(n-1)} + \dots + p_n(0) y$$

abspaltet, so daß lauter Gleichungen der Form $E(y) = g(x)$ [$g(x)$ bekannt] zu integrieren sind. Es werden die beiden Fälle behandelt: 1. $f(x) \equiv 0$ und die verschiedenen Wurzeln der Fuchsschen determinierenden Gleichung unterscheiden sich nicht nur

um ganze Zahlen. 2. $f(x)$ ist von der Form $x^\alpha \left(\sum_{i=0}^r g_i(x) (\log x)^i \right)$ [$g_i(x)$ regulär für $x=0$] und keine der Zahlen $\alpha + k$ (k ganz ≥ 0) ist Wurzel der determ. Gleichung. Im letzteren Falle ergibt sich ein Integral von derselben Beschaffenheit wie $f(x)$.

Kähler (Hamburg).

Thomas, Tracy Yerkles: The reduction of degenerate quadratic differential forms. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 215—219 (1934).

Es sei eine quadratische Form $\sum_1^n g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$ des Ranges $r < n - 1$ vorgelegt. Der Verf. zeigt, wie man mittels sukzessiver analytischer Transformationen der Urvariablen diese Form auf eine nicht-degenerierte $\sum_1^r h_{ab} dy^a dy^b$ von r Variablen y^1, \dots, y^r und $n - r$ Parameter y^{r+1}, \dots, y^n bringen kann. Eine einzige Transformation führt dann und nur dann zum Ziele, wenn gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

Hlavatý (Praha).

Vranceanu, G.: Sur une classification des équations d'un système de Pfaff. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1112—1114 (1934).

With a pfaffian system S is associated a sequence S_i such that the pfaffian system S_i contains every equation which is implied by S and whose derived form is of rank 2 in the presence of S . The sequence is unique in certain cases, in particular, when S is completely separable (Griffin, this. Zbl. 8, 65), and in terms of it the author states a necessary and sufficient condition for that type of system. The sequence leads to a classification of the equations of S according to their individual class number.

J. M. Thomas (Durham).

Ważewski, T.: Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Mathematica, Cluj 8, 103—116 (1934).

L'auteur construit une fonction $Q(x, y)$ qui possède dans un ensemble simplement connexe Ω des dérivées partielles continues de tous les ordres et telle que toute intégrale de l'équation partielle $z'_x + Qz'_y = 0$ qui 1°) est valable dans Ω tout entier et qui 2°) possède dans Ω des dérivées partielles continues du premier ordre, est constante. Toute intégrale première (valable dans Ω) de l'équation ordinaire $\frac{dy}{dx} = Q(x, y)$ est constante. Par conséquent tout facteur intégrant (valable dans Ω tout entier) de cette équation est identiquement nul dans Ω .

Autoreferat.

Mieghem, Jacques van: Étude sur la théorie des ondes. IX. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1279—1298 (1933).

(Vgl. dies. Zbl. 7, 409 und 8, 357.) Übertragung des Begriffs der charakteristischen Mannigfaltigkeit. Wenn die Differentialgleichungen des Systems von erster Ordnung sind ($c = 1$), so fallen Wellenfläche und charakteristische Mannigfaltigkeit zusammen.

Willy Feller (Kopenhagen).

Winants, Marcel: Résolution d'un nouveau problème à deux courbes pour une certaine équation hyperbolique du troisième ordre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 103—105 (1934).

L'a. détermine la solution $z(x, y)$ de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z = \omega(x, y)$$

pour laquelle on a $z(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, 0) = \mu(x)$, $z(x, x) = \rho(x)$. H. Lewy.

Zwirner, Giuseppe: Sull'equazione a derivate parziali delle superficie minime. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 4, 140—154 (1933).

Given a convex region D and an arbitrary continuous function φ defined on the

boundary of D ; it is desired to find a solution of the equation

$$(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0$$

assuming these boundary values. The existence of such a solution is known, since the Plateau problem is solvable; the author here shows the existence by methods of differential equations. The solvability is shown for boundary values possessing continuous derivatives to the third order. The general boundary function φ is then approximated uniformly by such differentiable boundary functions φ_n ; the corresponding solutions z_n converge to a limit z . Discussion of a certain parametrization of the z_n shows that the derivatives of the z_n of first, second and third orders are uniformly bounded in every region completely interior to D , so that z is also a solution of the equation. — Some amplifications and corrections seem desirable; e. g., inequality (14) and the last line of p. 149.

McShane (Princeton).

Capoulade, J.: Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coefficients singuliers. *Mathematica*, Cluj 8, 139—184 (1934).

Es sei Ω ein ebenes Gebiet mit der Begrenzung $\sigma + \Sigma$, wobei σ und Σ einen positiven Abstand haben. σ heißt bezüglich einer linearen elliptischen Differentialgleichung „uneigentliche Randmenge“, wenn die Lösung der verallgemeinerten ersten Randwertaufgabe im Wienerschen Sinne (Wortlaut etwa dies. Zbl. 7, 349) auf σ nicht die vorgeschriebenen Randwerte anzunehmen braucht. Ist $L(u) = 0$ eine Gleichung in der Normalform mit hinreichend regulären Koeffizienten, so fallen ihre uneigentlichen Randmengen natürlich mit denen der Laplaceschen Gleichung zusammen. Daß bei singulären Koeffizienten alle Möglichkeiten vorkommen können, wird an speziellen Gleichungen der Form

$$\Delta u + \frac{a}{x} u_x + b u_y + \frac{c}{x^2} = 0$$

gezeigt.

Willy Feller (Kopenhagen).

Sobrero, L.: Di una nuova variabile ipercomplessa interessante nella teoria dell'elasticità. I. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 19, 77—82 (1934).

Sobrero, L.: Alcuni teoremi della teoria delle funzioni ipercomplesse. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 19, 135—140 (1934).

Mit der hyperkomplexen Zahl $a = a_0 + a_1 j + a_2 j^2 + a_3 j^3$ werde gerechnet wie mit Polynomen modulo $(j^4 + 2j^2 + 1)$; setzt man dann $|a|^2 = (a_2 - a_0)^2 + (a_3 - a_1)^2$, so ist $|ab| = |a| \cdot |b|$. Es wird das Analogon der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für eine Funktion $\eta = f(\xi)$ aufgestellt. Bei viermaliger Differenzierbarkeit genügen alle Komponenten den $\binom{4}{2}$ Gleichungen

$$\frac{\partial^4 y_i}{\partial x_n^4} + 2 \frac{\partial^4 y_i}{\partial x_n^2 \partial x_m^2} + \frac{\partial^4 y_i}{\partial x_m^4} = 0, \quad n \neq m, \quad i, n, m = 0, 1, 2, 3.$$

— Die nächste Mitteilung soll Anwendungen auf die Randwertaufgaben der Gleichung $\Delta \Delta u = 0$ bringen.

Willy Feller (Kopenhagen).

De la Vallée Poussin, C.: Sur l'extension de la méthode du balayage à une aire connexe non étalée. *Bull. Acad. Roy. Belg.* V. s 19, 1217—1229 (1933).

Il s'agit d'une aire qui se recouvre elle-même un nombre fini de fois, et dont le contour, simple ou multiple, présente des points multiples apparents; les trous, s'il y en a, sont en nombre fini. Le contour est formé de segments de lignes à courbure bornée, pouvant se rejoindre sous des angles quelconques, même supérieurs à 2π , mais bornés. La méthode consiste à décomposer l'aire en un nombre fini d'autres aires, empiétant les unes sur les autres, et qui, transformées au besoin par certaines représentations conformes, sont étalées. A chacune de ces aires partielles s'applique l'étude faite précédemment par l'aut. (ce Zbl. 4, 114); pour passer à l'aire totale, on combine le balayage avec une méthode alternée, analogue à celle de Schwarz. On étudie le potentiel obtenu, et ses dérivées, au voisinage de la frontière. Les résultats sont appliqués à la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur un cercle (ce Zbl. 4, 355). On étudie le cas d'une aire limitée par des courbes de Jordan. Une partie des résultats subsiste dans l'espace (ce Zbl. 6, 308).

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Spezielle Funktionen:

Scatizzi, P.: *Derivate della Pseudo-Euleriana*. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei 87, 134—145 (1934).

Verf. untersucht die unvollständige Gammafunktion

$$\Gamma(x, y) = \int_x^{\infty} e^{-\xi} \xi^{y-1} d\xi, \quad (x \geq 0, y > 0)$$

und stellt für sie und ihre wiederholten Ableitungen nach x Formeln auf. Diese werden zum Beweis der Gleichung (c, n natürliche Zahlen)

$$\frac{\int_0^p \xi^c (1-\xi)^{n-c} d\xi}{\int_0^1 \xi^c (1-\xi)^{n-c} d\xi} = p^{c+1} \left\{ 1 + \frac{(c+1)(1-p)}{1!} + \frac{(c+1)(c+2)(1-p)^2}{2!} + \dots + \frac{(c+1)(c+2) \dots (n-1)(1-p)^{n-c}}{(n-c)!} \right\},$$

und zur Berechnung von unbestimmten Integralen, z. B. (y natürliche Zahl)

$$\int \frac{x^{y-1} dx}{\sum_{m=0}^{y-1} \frac{x^m}{m!}} = -(y-1)! \log \left\{ e^{-x} (y-1)! \sum_{m=0}^{y-1} \frac{x^m}{m!} \right\} + \text{konst.}$$

angewandt.

Mahler (Manchester).

Shabde, N. G.: On some definite integrals involving Legendre functions. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 41—46 (1934).

Definite integrals are evaluated in which the integrand involves the product of three Legendre functions or three associated Legendre functions. For example, the value of the integral

$$\int_{-1}^1 (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} P_p^m(\mu) P_q^m(\mu) Q_n^m(\mu) d\mu$$

is given as a finite series. Nicholson's integrals involving one or two Legendre functions are also generalized.

W. N. Bailey (Manchester).

Sahai, Kuldip: On certain formulae involving associated functions of Legendre for unrestricted parameters. Proc. Benares Math. Soc. 14, 31—39 (1932).

Zwischen zwei Fundamentallösungen $U_{m,n}$ und $V_{m,n}$ der Differentialgleichung

$$(1-z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right\} y = 0 \quad (1)$$

besteht bekanntlich die Wronskische Beziehung:

$$(1-z^2) \left\{ U_{m,n} \frac{dV_{m,n}}{dz} - V_{m,n} \frac{dU_{m,n}}{dz} \right\} = C(m, n), \quad (2)$$

wo $C(m, n)$ eine nur von m und n abhängige Konstante bedeutet. — Für allgemeine Werte von m, n und z besitzt (1) u. a. die 8 speziellen Lösungen $P_n^{\pm m}(\pm z)$, $Q_n^{\pm m}(\pm z)$, wo $P_n^m(z)$ und $Q_n^m(z)$ die beiden zugeordneten Legendreschen Funktionen bedeuten (nach der Definition von Hobson, Philos. Trans. Roy. Soc. London 187 A, 443). — Zwischen je zwei dieser Lösungen, die ein Fundamentalsystem bilden, bestehen $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ Beziehungen der Form (2). Der Verf. hat von 17 dieser 28 Kombinationen die Werte der Konstanten $C(m, n)$ aus (2) berechnet. Er beweist z. B.:

$$(1-z^2) \left\{ Q_n^{-m}(z) \frac{dQ_n^m(-z)}{dz} - Q_n^m(-z) \frac{dQ_n^{-m}(z)}{dz} \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin m\pi, & I(z) = 0; |R(z)| < 1, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Die übrigen 16 Ergebnisse werden ohne Beweis hingeschrieben; sie können in derselben Weise erhalten werden. Ob alle diese Ergebnisse ein völliges Zutrauen verdienen, scheint mir zweifelhaft. Insbesondere sind XII und XVI, XV und XVII, VII und XV miteinander im Widerspruch!

S. C. van Veen (Dordrecht).

Popov, A.: Bemerkung zur Arbeit von V. Fock „Zur Berechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung“. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 380—381 u. dtsh. Zusammenfassung 381 (1934) [Russisch].

This paper gives a derivation of the equation:

$$\int_0^{\infty} J_0(\varrho x) \left(\frac{\sqrt{x^2 + p^2} - \sqrt{x^2 + q^2}}{\sqrt{x^2 + p^2} + \sqrt{x^2 + q^2}} \right)^{\nu} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + p^2)(x^2 + q^2)}} = I_{\nu} \left(\varrho \frac{p - q}{2} \right) K_{\nu} \left(\varrho \frac{p + q}{2} \right)$$

being different from the original derivation by V. Fock. (Fock, see this Zbl. 7, 272.)

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Mitra, S. C.: On certain integrals and expansions involving Bessel functions. Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 81—98 (1933).

This paper uses the theory of the transformation $f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} h(x) dx$ to evaluate integrals involving Bessel functions. For example

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{t}} J_n(t) t^{-1} dt = 2 J_n(\sqrt{2a}) K_n(\sqrt{2a})$$

($a > 0$, $R(n) > -\frac{1}{2}$). Expansions of the type $\frac{1}{2} [K_0(2\sqrt{y(y-1)}) - K_0(\sqrt{2(y(y+1))})]$ = $K_1(2y) + \frac{K_3(2y)}{3!} + \frac{K_5(2y)}{5!} + \dots$; $y > 1$ are derived. The paper ends with the formula $\exp(\sqrt{2}x) = \{J_0(x)I_0(x) - 2J_2(x)I_2(x) + 2J_4(x)I_4(x) - \dots\}$. No convergence questions are treated.

Murnaghan (Baltimore).

Mitra, S. C.: On the squares of Weber's parabolic cylinder functions and certain integrals connected with them. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 27—32 (1934).

The parabolic cylinder functions $D_n(x)$ considered in this paper satisfy the differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0$. On writing $U_n(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} D_n(x)$ the author shows that

$$D_n^2(x) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^{n+\frac{1}{2}}} \left\{ U_0(x) + \frac{1}{2(2n-1)} \frac{1}{2} U_2(x) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \frac{1}{2^2} U_4(x) + \dots \right\}.$$

He also obtains an expression for $\int_0^{\infty} D_n^2(x+t) dx$ in terms of the functions $U_{2s+1}(t)$, $s = 0, 1, 2, \dots$

Murnaghan (Baltimore).

Mehrotra, Brij Mohan: Theorems connecting different classes of self-reciprocal functions. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 53—56 (1934).

Continuing the work of Hardy and Titchmarsh, further rules are obtained for deriving from a given function, which is self-reciprocal for a transform of a particular order, other functions which are self-reciprocal for transforms of different orders. One such theorem is: If $f(x)$ is R_{μ} , the function

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x Q\left(\log \frac{x}{y}\right) f(y) dy$$

is R_{ν} , provided that

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}s\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s\right) \chi(s) e^{xs} ds, \quad (x > 0),$$

$$= 0, \quad (x < 0),$$

where k is any positive number, and $\chi(s) = \chi(1-s)$. *W. N. Bailey* (Manchester).

Bickley, W. G.: Two-dimensional potential problems for the space outside a rectangle. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 82—105 (1934).

Das Außengebiet eines Rechtecks wird auf das Außengebiet eines Kreises abgebildet, was bekanntlich auf elliptische Funktionen führt. Folgende hydrodynamische

Probleme werden betrachtet: 1. Strömung entlang des Rechtecks. 2. Rotationsströmung um das Rechteck. 3. Drehung des Rechtecks in einer idealen Flüssigkeit. Die einschlägigen Arbeiten von J. D. Cockroft [J. Inst. El. Eng. **66**, 385—409 (1928) und Proc. Roy. Soc. A **122**, 533—542 (1929)] werden nicht erwähnt. *M. J. O. Strutt*.

Plemelj, Josef: Über die Transformation des elliptischen Gebildes in die Normalform von Weierstrass. Publ. Math. Univ. Belgrade **2**, 161—163 (1933).

Es wird ein einfaches Verfahren angegeben, das elliptische Gebilde $(x, \sqrt{F(x)})$ mit biquadratischem $F(x)$ in ein Gebilde $(\xi, f(\xi))$ mit kubischem $f(\xi)$ zu überführen, und zwar ohne Lösung der biquadratischen Gleichung. *Ahlfors* (Helsingfors).

Petrovitch, Michel: Un mode général de représentation des fonctions elliptiques. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 698—700 (1934).

Es wird gezeigt, daß jede doppeltperiodische Funktion n -ter Ordnung als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellbar ist, welche eine Integraldarstellung der Form

$$\frac{1}{2\pi i} \int \Phi(t, z) P(t - z) dt$$

gestatten, wo $\Phi(t, z)$ eine von der gegebenen Funktion unabhängige meromorphe Funktion von t und z bezeichnet und $P(x)$ ein Polynom vom Grade n ist. *Myrberg*.

Mordoukhay-Boltowskoy, Dimitri: Sur les intégrales abéliennes avec les systèmes réductibles des périodes. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1006—1008 (1934).

Man nehme an, ein bestimmtes Abelsches Integral 1. Gattung vom Geschlecht p lasse sich als Summe von Integralen 1. Gattung von geringerem Geschlecht π darstellen. Man kann dann die zu diesen Integralen konjugierten betrachten und entsprechende Summen bilden. Entweder erhält man dann immer wieder Integrale vom Geschlecht p (vollständige Reduktion), oder einige dieser Summen ergeben Konstanten (unvollständige Reduktion). Jede Summe von M Abelschen Integralen, gleich welcher Gattung, läßt sich im ersten Fall als Summe von π , im zweiten unter Umständen von noch weniger Integralen darstellen. Eine Summe von Integralen 1. Gattung läßt sich im Fall der unvollständigen Reduktion entweder als Summe von weniger als π Integralen oder als Summe von Integralen geringeren Geschlechtes als π darstellen.

Ott-Heinrich Keller (Berlin).

Venkatachaliengar, K.: Generalisation of Jacobi's θ -function formulae. J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 23—28 (1934).

Allem Anschein nach behauptet Verf. zu Anfang seiner Arbeit folgendes: Es sei A eine schiefsymmetrische quadratische Matrix von n^2 Elementen, ξ und η seien zwei variable Vektoren des R_n , und es bestehe die Relation $A\xi = A'\eta$, wo A' die transponierte Matrix von A bezeichnet. Dann ist die dadurch definierte lineare Beziehung zwischen den Vektoren ξ und η orthogonal. Dieser Satz ist richtig, gibt aber, wenn überhaupt, d. h. wenn die Determinante von A nicht verschwindet, was Verf. offenbar annimmt, nur den trivialen Zusammenhang $\xi = -\eta$. — An sich ist der Gedanke, Summen von Produkten von elliptischen ϑ -Funktionen mit Hilfe orthogonaler Transformationen auf die Summationsvariablen umzuformen, wohl durchführbar, die vorliegende Durchführung dieses allgemeinen Gedankens ist aber unzureichend.

Petersson (Hamburg).

Differenzgleichungen:

Ghermanesco, M.: Équations différentielles et équations aux différences finies. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **35**, 121—128 (1933).

This paper is devoted mainly to the equation $f(x+p\omega) + \sum_{i=1}^p \varphi_i(x) f(x+(p-i)\omega) = 0$

with coefficients $\varphi_i(x)$ of period ω , and in particular to the equation

$$f(x+2\omega) - \varphi(x) f(x+\omega) + f(x) = 0;$$

if the latter equation holds for all ω , its solution is shown to be $f(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$. Certain questions (already studied or proposed by Angelesco) concerning plane curves are also considered.

C. R. Adams (Providence).

Ghermanesco, M.: Sur les équations aux différences finies. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 12, 305—326 (1934).

By iteration the equation $f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x)$ [λ a parameter, ω a constant, $g(x)$ known, $f(x)$ to be determined] is seen to have a formal solution

$$f(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(x + n\omega).$$

The author attempts to determine conditions under which this formal solution will provide an actual solution meromorphic in λ , and to examine related questions. The reviewer has found it quite impossible to follow the author's arguments. *Adams.*

Li, Ta: Berichtigungen zu meiner Arbeit: Neue Beweise zu den Carmichaelschen Sätzen über die Reihe $\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x + n)$. J. reine angew. Math. 170, 241 (1934).

When the corrections here indicated are made it will be seen that the original article loses the apparent gain in simplification which was the primary reason for its existence. (Cf. this Zbl. 6, 301.) *R. D. Carmichael* (Urbana).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Fry, T. C.: Fundamental concepts in the theory of probability. Amer. Math. Monthly 41, 206—217 (1934).

Bernstein, S.: Sur les chaînes linéaires de Markov quasi-continues. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 361—364 u. franz. Zusammenfassung 365 (1934) [Russisch].

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. 8, 265). Die Note enthält: 1. Eine physikalische Interpretation der Theorie, 2. eine Erläuterung des Begriffs der stochastischen Ableitung (Geschwindigkeit), und 3. Ausdrücke für die Korrelationskoeffizienten zwischen den Werten der Variablen zu verschiedenen Zeiten.

A. Khintchine (Moskau).

Wiek, G. C.: Su un problema del calcolo delle probabilità. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 27—32 (1934).

Die zufälligen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n seien gegenseitig unabhängig; die Verteilung von x_i ($1 \leq i \leq n$) sei die Gleichverteilung auf der Strecke $(0, n)$; $f(x)$ sei eine für $x > 0$ stetige Funktion, $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ und $\int |f(x)| dx$ konvergent. Gesucht wird die Grenzverteilung von $\sum_{i=1}^n f(x_i)$ für $n \rightarrow \infty$. Das Problem wird mittels der Methode der charakteristischen Funktionen angegriffen. Im Fall $f(x) = x^{-\alpha}$ ($\alpha > 1$) wird ein expliziter Ausdruck für die Lösung gegeben; auch asymptotische Abschätzungen werden durchgeführt.

A. Khintchine (Moskau).

Kolmogoroff, A.: Zufällige Bewegungen. (Zur Theorie der Brownschen Bewegung.) Ann. of Math., II. s. 35, 116—117 (1934).

Bei der üblichen Behandlung der stetigen zufälligen Prozesse werden die Änderungen der Parameter, von denen der Zustand des Systems abhängt, als unendlich klein von der Ordnung $\sqrt{\Delta t}$ angenommen (t bedeutet die Zeit); die Änderungsgeschwindigkeiten werden daher unendlich groß. Hier wird gezeigt, wie man durch Hinzunahme der Geschwindigkeiten zu den Parametern mittels ganz ähnlicher Methoden erreichen kann, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte der so erweiterten Parameter-gesamtheit einer Fokker-Planckschen Differentialgleichung genügt. *Khintchine.*

Krutkow, G.: Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Über die Verteilungsfunktion $f(v, x, t)$ und die Diffusionsgleichung. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 393—395 u. dtsch. Text 396—398 (1934) [Russisch].

Die simultane Verteilungsfunktion $f(v, x, t)$ für die Koordinate x und die Geschwindigkeit v einer in Brownscher Bewegung begriffenen Partikel zur Zeit t genügt

einer Differentialgleichung vom Fokker-Planckschen Typus. Für große t erhält man die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung und die gewöhnliche Diffusionsgleichung für die Koordinatenverteilung. Die Ergebnisse stehen in nächster Beziehung zu einer Note von Kolmogoroff (vgl. vorst. Referat), auf die auch Verf. hinweist.

A. Khintchine (Moskau).

Krutkow, G.: Beweis der Haupteigenschaft der kanonischen Verteilung für ein beliebiges Aggregat. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 305—307 u. dtsh. Text 307—309 (1934) [Russisch].

Für ein aus N gleichen lose gekoppelten Teilsystemen bestehendes physikalisches System wird die Relation

$$\frac{E^n - \bar{E}_m^n}{E_m^n} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

bewiesen. E ist hier die Energie des Systems, \bar{E}_m der Mittelwert von E^n über eine kanonische Gesamtheit, E_m der Energiewert mit größter Wahrscheinlichkeitsdichte und n eine ganze Zahl $o(N)$.

A. Khintchine (Moskau).

Subramanian, S.: On „the centre of population“. J. Annamalai Univ. 3, 59—61 (1934).

Pajevskij, V.: On a certain expression for the probability of survivorship. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 381—385 u. engl. Zusammenfassung 385—387 (1934) [Russisch].

Innerhalb einer bestimmten Bevölkerung sei $g(\tau)$ die Geburtendichte zur Zeit τ und $\varphi(x, \tau)$ die Sterblichkeitsdichte für das Alter x und den Zeitpunkt τ . Wenn diese beiden Funktionen gegeben sind, läßt sich leicht ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit bilden, das Alter x zu erreichen, falls das Leben innerhalb einer Zeitstrecke (τ_1, τ_2) mit vorgegebenen Sterblichkeitsverhältnissen verläuft (der präzise Sinn dieser Bedingung ist dem Ref. allerdings unklar geblieben). Einige Anwendungen werden erläutert und andere Veröffentlichungen vorbehalten.

A. Khintchine (Moskau).

Vajda, Stephan: Berechnung von Versicherungswerten bei Änderung des Rechnungszinses. Assekuranz-Jb. 53, 104—114 (1934).

Broggi, Ugo: Su di alcune relazioni fra rendite e capitali assicurati. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 4, 1—6 (1934).

Del Vecchio, Ettore: Relazioni tra i diversi premi inerenti alle assicurazioni sociali. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 4, 7—40 (1934).

Martinotti, P.: Sul calcolo delle probabilità di sopravvivenza dei gruppi. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 4, 41—49 (1934).

Numerische und graphische Methoden.

● **Couffignal, Louis:** Les machines à calculer leurs principes, leur évolution. Paris: Gauthier-Villars 1933. VIII, 86 S. et 24 Fig. Frs. 15.—.

Subbotin, M.: Sur l'intégration numérique des équations différentielles. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 7, 895—902 (1933) [Russisch].

Une des méthodes de l'intégration numérique des équations différentielles est la méthode des approximations successives. Cette méthode mène à la restriction de l'intervalle de l'intégration. Se basant sur les travaux de Tietjen et Oppolzer l'auteur montre dans quels cas ce défaut peut être annihilé ou affaibli. Glagoleff (Moskau).

Mehlig, H.: Die Verwendung nomographischer Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 14, 122—123 (1934).

Terebesi, Paul: Ein neues Näherungsverfahren zur harmonischen Analyse. Arch. Elektrotechn. 28, 195—200 (1934).

Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_{\nu} \cos \frac{2\pi}{p} \nu x + b_{\nu} \sin \frac{2\pi}{p} \nu x \right)$$

werden die Rechteckkurven

$$h_\nu(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin \frac{2\pi}{p} \nu x + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi}{p} \nu x + \dots \right\}$$

$$g_\nu(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos \frac{2\pi}{p} \nu x - \frac{1}{3} \cos 3 \frac{2\pi}{p} \nu x + \dots \right\}$$

herangezogen. Es ist nämlich:

$$\frac{\pi}{2p} C_\nu = \frac{\pi}{2p} \int_0^p f(x) g_\nu(x) dx = a_\nu - \frac{1}{3} a_{3\nu} + \frac{1}{5} a_{5\nu} - \dots$$

$$\frac{\pi}{2p} S_\nu = \frac{\pi}{2p} \int_0^p f(x) h_\nu(x) dx = b_\nu + \frac{1}{3} b_{3\nu} + \frac{1}{5} b_{5\nu} + \dots$$

Die Integrale C und S lassen sich analytisch, graphisch oder numerisch sehr bequem auswerten. Sofern es erlaubt ist, die Entwicklung von $f(x)$ an einer bestimmten Stelle abzurechnen, lassen sich die a_ν und b_ν durch entsprechende endliche Reihen aus den C_ν und S_ν zusammensetzen. Man findet die C_ν und S_ν , z. B. durch Integration mit dem Planimeter sehr einfach, da die Faktoren $g(x)$ und $h(x)$ abwechselnd $+1$ und -1 sind. — Über die Genauigkeit des Verfahrens werden nur rohe Restabschätzungen gemacht — die mathematische Untersuchung der Genauigkeit bleibt ein lohnendes Problem für künftige Arbeiten.

K. Stumpff (Lindenberg).

Wagner, A.: Kritische Bemerkungen zur Differenzenmethode. Beitr. Physik frei. Atmosph. 21, 269—282 (1934).

Sind an einem Orte S_1 von irgendeiner physikalischen Größe (z. B. dem Luftdruck) durch Beobachtungen m Werte X_i mit dem arithmetischen Mittel \bar{X} , an einem anderen (benachbarten) Orte S_2 von demselben Element n Werte Y_j festgestellt worden, wobei von den n Werten Y_j wenigstens der größere Teil gleichzeitig mit den X_i beobachtet wurde, so pflegt man in der Meteorologie, wenn $n \ll m$ den wahren Mittelwert der Y nicht durch Mittelbildung über die (wenigen) n Werte, sondern dadurch annähernd zu bestimmen, daß man von den gleichzeitig beobachteten Werten die Differenzen $D = Y_j - X_i$ und deren arithmetisches Mittel \bar{D} berechnet und $Y' = \bar{X} + \bar{D}$ setzt. Zahlreiche empirische Vergleiche haben ergeben, daß dieses auf Lamont zurückgehende Differenzenverfahren unter gewissen Voraussetzungen zu genaueren Mittelwerten führt, als die unmittelbare Bildung des arithmetischen Mittels \bar{Y} aus wenigen Beobachtungen. — A. Wagner untersucht in der vorliegenden Arbeit, unter welchen Bedingungen der mittlere Fehler $f_{Y'}$ des nach dem Differenzenverfahren berechneten Mittelwertes Y' kleiner ist als der Fehler $f_Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}$ des unmittelbar berechneten arithmetischen Mittels \bar{Y} , wobei σ_Y die Streuung der Y_j bedeutet. Es ergibt sich, daß nur dann $f_{Y'} < f_Y$ ist, wenn $2r_{xy} > \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$. r_{xy} ist hierin der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y . Im besonderen ist das Differenzenverfahren selbstverständlich gänzlich unbrauchbar, wenn $r_{xy} < 0$. — W. untersucht weiterhin, wie groß der Fehler des indirekt berechneten Mittelwertes Y' ist, wenn die stochastische Beziehung zwischen X und Y nicht durch die Gleichung $Y - X = \text{konst.}$, sondern durch die allgemeinere lineare Beziehung $Y = aX + b$ am besten dargestellt werden kann. Die Bedingung dafür, daß der mittelbar berechnete Mittelwert Y' einen geringeren Fehler aufweist als das unmittelbar berechnete Mittel Y , ist

$$2\mu_{xy}^2 > \sigma_x^2(2\sigma_y^2 - \sigma_x^2), \quad \text{wobei} \quad \mu_{xy} = r_{xy}\sigma_x\sigma_y.$$

Schließlich zeigt W., daß unter Berücksichtigung der allgemeinen Kriterien bezüglich der Anwendung des Differenzenverfahrens dieses auch zur Bestimmung der Komponenten der mittleren resultierenden Luftversetzung benützt werden kann, ja sogar —

wegen der Dürftigkeit des aerologischen Beobachtungstoffes — in der gemäßigten Zone der direkten Mittelbildung vorzuziehen ist. *F. Baur* (Frankfurt a. M.).

Geometrie.

Schmidt, Arnold: Die Herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung. Math. Ann. 109, 538—571 (1934).

An D. Hilberts Abhandlung „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck“ und die Ergänzungen zu dieser Arbeit in der 7. Auflage von Hilberts Grundlagen der Geometrie anknüpfend fragt Verf. nach Axiomensystemen für die ebene Euklidische Geometrie, welche, ohne Spiegelungsforderungen zu enthalten, alle Spiegelungseigenschaften nach sich ziehen. Naturgemäß enthalten solche Axiomensysteme zunächst die „fundamentalen Axiome F “, d. h. die Verknüpfungs-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome ohne den ersten Kongruenzsatz und das Parallelenaxiom. Auf F fußend werden zahlreiche geometrische Sätze ohne Spiegelungsforderungen auf ihre axiomatischen Eigenschaften hin untersucht, z. B. der erste, dritte und vierte Kongruenzsatz für gleichsinnig bezogene Dreiecke (Axiome $B0, 1, 2$); das Axiom $W1$ „ein Winkel liegt nicht in einem kongruenten mit gleichem Scheitel“; $K1$ „der Kreis ist konvex“, die Archimedischen Axiome für Strecken ($A0$) und Winkelabtragung ($A1$) und ein dem Hilbertschen Nachbarschaftsaxiom verwandtes, aber einfacheres Axiom $N1$ „eine Gerade liegt nicht beliebig nah an einem Punkt, der nicht auf ihr liegt“. Die zur Einführung der Spiegelungen hinreichenden 14 angegebenen Axiomensysteme enthalten sämtlich eine Archimedische Forderung, eine Tatsache, welche die grundlegende Rolle der Spiegelungen in helles Licht setzt. Als Beispiele seien die Systeme $F, B0, K1, A0$ und $F, B0, A0, N1$ angegeben; in ihnen läßt sich jedes der 3 hinzugefügten Axiome als unentbehrlich zur Einführung der Spiegelungen neben F und den 2 übrigen Axiomen nachweisen. Ein interessantes Zwischenergebnis besagt, daß unter Annahme von $F, B0, A0$ die Sätze $W1, A1$ und die Kommutativität der Winkeladdition gleichwertig sind. Die Unabhängigkeitsbeweise werden mit algebraischen Modellen erbracht, von denen eines von B. Neumann in den S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933 (dies. Zbl. 7, 52) angegeben wurde.

K. Reidemeister (Königsberg).

Mordoukhay-Boltovskoy, D.: Sur les constructions au moyen de la règle et d'un arc de cercle fixe dont le centre est connu. Period. Mat., IV. s. 14, 101—111 (1934).

Ein einfacher Beweis des Steinerschen Satzes über die Ausführbarkeit „der geometrischen Konstruktionen mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“. Der Verf. zeigt die Konstruktionsmöglichkeit der Elementarausdrücke $a \pm b$, $\frac{ac}{b}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, \sqrt{ab} . Außerdem wird bewiesen, daß nicht der ganze Kreis notwendig ist. Ein beliebiger kleiner Kreisbogen mit seinem Mittelpunkt genügt. (Satz von Severi, Rend. Circ. mat. Palermo 1904).

O. Bottema (Sappemeer, Holland).

● **Sommerville, D. M. Y.:** Analytical geometry of three dimensions. Cambridge: Univ. press 1934 XIV, 416 S. 18/-.

Der Verf. wünscht, wie er im Vorwort ausführt, eine Einführung in die analytische Geometrie zu geben, die — im Gegensatz zu Salmons immer noch als standard work anzusehendem „Treatise“ — modernen Geschmack und moderne Methoden zur Geltung bringt. Diese Tendenz kommt in erster Linie dadurch zum Ausdruck, daß Begriffsbildungen und Hilfsmittel wie projektive, Ebenen-, Plücker'sche Linienkoordinaten, imaginärer Kugelkreis, mehrdimensionale Geometrie, Übertragungsprinzipien usw. überall herangezogen werden, wo sich damit Vereinfachungen erzielen oder Zusammenhänge aufdecken lassen. Auf Systematik im Sinne des Erlanger Programms wird jedoch verzichtet. Diesbezügliche und andere prinzipielle Fragen wie die Behandlung des Imaginären werden nur gelegentlich gestreift. Das inhaltsreiche Buch behandelt die folgenden Gegenstände: Cartesische Koordinaten — Geraden und Ebenen — Homogene und projektive Koordinaten — Kugel — Kegel und Zylinder — Typen der Flächen 2. Ordnung — Elementare Eigenschaften der Flächen 2. Ordnung — Reduktion der allgemeinen

Gleichung 2. Grades — Erzeugende und Parameterdarstellung — Ebene Schnitte von Flächen 2. Ordnung — Gleichungen in Ebenenkoordinaten — Fokaleigenschaften — Lineare Scharen von Flächen 2. Ordnung — Algebraische Kurven und abwickelbare Flächen (insbesondere Raumkurven 3. und 4. Ordnung) — Invarianten der Paare von Flächen 2. Ordnung — Liniengeometrie (Kleinsche Darstellung im 5-dimensionalen Raum, lineare und quadratische Komplexe) — Algebraische Flächen (Einiges über Regelflächen, Flächen 3. und 4. Ordnung, speziell Steinersche und Veronesesche Fläche). — Jedem Kapitel ist eine Reihe von Aufgaben zugefügt.
W. Fenchel (Kopenhagen).

Turri, Tullio: Correlazioni proiettivamente distinte le cui omografie quadrato sono proiettivamente identiche. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 3, 132—135 (1933).

Verf. betrachtet in der komplexen Ebene die Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Korrelation sowie die zugehörigen Elementarteiler. Dafür, daß es zu einer gegebenen Korrelation γ eine davon verschiedene Korrelation δ gibt, so daß $\gamma^2 = \delta^2$, sind bestimmte Symmetrien der Wurzeln der charakteristischen Gleichung von γ notwendig und hinreichend. Es gibt dann genau eine Korrelation δ der verlangten Eigenschaft. In Räumen gerader Dimensionszahl sind diese Bedingungen unerfüllbar. Es werden für die Dimensionszahlen 1 und 3 alle möglichen Fälle aufgezählt.
Ott-Heinrich Keller (Berlin).

Bilimovitch, Anton: Sur l'algèbre du système de vecteurs glissants. Bull. Acad. Sci. Math. et Nat., Belgrade Nr 1, 119—121 (1933).

Neue Bestimmung des Einheitssystems für einen linienflüchtigen Vektor (Motor): Auf einer Geraden werden zwei Einheitsvektoren betrachtet, einer von der Dimension des Resultantvektors und einer von der Dimension des Momentvektors. Diese beiden werden mit zwei Zahlen, deren Quadratsumme 1 beträgt, multipliziert; der Inbegriff dieser beiden Vektoren ist das Einheitssystem.
L. Schrutka (Wien).

Glaser, Walter: Bemerkung über die Zurückführung der formalen Operationen in der Vektoranalysis auf diejenigen der Vektoralgebra. Z. Physik 88, 409—413 (1934).

Verf. ersetzt in Abänderung der Integralfunktionen von Ignatowsky die Vektordifferentialoperationen *div*, *grad*, *rot* durch einen einheitlichen Integraloperator und gibt die Rechenregeln an, die für diesen Operator gelten. Durch Integration des Operators über ein endliches Volumen werden drei Integralsätze erhalten; aus dem einen von ihnen, dem Gaußschen Satz, kann man u. a. auch den Satz von Stokes einfach ableiten. Referent macht auf die koordinatenfreie Definition der Vektoroperationen aufmerksam, die auch eine Übertragung auf den n -dimensionalen Vektorraum nahelegen.
Herzberger (Jena).

Servais, Cl.: Sur la géométrie du tétraèdre. IX. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1230—1236 (1933).

VII., VIII. vgl. dies. Zbl. 7, 418.

Thébault, V.: Sur les cercles de Tucker. Mathesis 48, 84—88 (1934).

Goormaghtigh, R.: Construction du centre de courbure en un point du bicoïne. Mathesis 48, 89—91 (1934).

Vyčichlo, F.: Une construction de la section méridienne d'un hélicoïde général. Čas. mat. fys. 63, 147—151 u. franz. Zusammenfassung 151 (1934) [Tschechisch].

Colucci, Antonio: Sulle coniche osculatrici ad una data curva. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 71, 164—182 (1933).

Identisch mit der dies. Zbl. 7, 72 referierten Arbeit.

Roever, W. H.: Some frequently overlooked mathematical principles of descriptive geometry. Amer. Math. Monthly 41, 142—159 (1934).

Verf. will die Mathematiker Amerikas auf den wissenschaftlichen und pädagogischen Wert der darstellenden Geometrie aufmerksam machen, zumal dort diese Disziplin noch wenig Anklang gefunden hat und in den Schulen von — mathematisch nicht interessierten — Zeichenlehrern gelehrt wird. Zu diesem Zweck werden die Grundgedanken der gebräuchlichsten Abbildungsarten: Auf- und Grundriß (Mongesche Projektion), normale und schiefe Achsonometrie, Perspektive und kotierte Projektion

besprochen und als Beispiel die Darstellung eines Drehkörpers kurz erläutert. Auffallend ist, daß die Elementaraufgaben im Gegensatz zur neueren Entwicklung (s. z. B. E. Müller-E. Kruppa, Vorl. ü. darst. Geometrie. I. Die linearen Abbildungen. Leipzig und Wien 1923) in folgende drei Gruppen eingeteilt werden: a) Lagenaufgaben, b) Aufgaben über normale Geraden und Ebenen, c) Aufgaben über Strecken, Winkel usw. Beachtenswert ist aber der Hinweis auf eine kotierte schiefe Projektion, die nach Mitteilung des Verf. in jüngster Zeit in der Schweiz zur Herstellung von reliefartigen Landkarten verwendet wird.

J. L. Krames (Graz).

Tschetweruchin, N.: Geradentripel als Projektion von rechtwinkligen Achsenkreuzen im Raume. Rec. math. Moscou **40**, 494—502 (1933).

Nach dem Pohlkeschen Satz darf man drei durch einen Punkt O gehende Geraden in der Bildebene stets als Parallel- und auch als Zentralprojektion eines rechtwinkligen räumlichen Achsenkreuzes auffassen. Der Verf. bestimmt zunächst das Projektionsgebiet, d. h. die Gesamtheit der durch O gehenden Projektionsstrahlen, für die es Original-Achsenkreuze gibt. Dieses Gebiet wird begrenzt durch die Erzeugenden dreier Kegelflächen, von denen jede ein Geradenpaar des gegebenen ebenen Tripels enthält. Frage: Wann darf man zwei in der Bildebene gezeichnete Tripel $1, 2, 3$ und $1', 2', 3'$ mit gemeinsamem Scheitel als Parallelprojektion (oder auch als Zentralprojektion) zweier Achsenkreuze auffassen? Antwort: Dann und nur dann, wenn die beiden Tripel wenigstens ein getrenntes Geradenpaar enthalten, wenn sich also z. B. $1, 2$ und $2', 3'$ trennen. Die elementargeometrischen Überlegungen sind sehr ansprechend. Rehbock.

Hajós, Georg: Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski. Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 224—225 (1934).

Ein konvexer Körper des n -dimensionalen Raumes mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt enthält stets einen vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkt, wenn sein Volumen größer als 2^n ist. Der ursprüngliche Minkowskische Beweis für diesen Satz wird vereinfacht; ein dort vorkommender Grenzübergang erweist sich als überflüssig. [Vgl. übrigens auch Bonnesen und Fenchel, Theorie der konvexen Körper. Erg. Math. **3**, H. 1, S. 126 (1934).]

W. Fenchel (Kopenhagen).

Marchaud, A.: Sur les surfaces convexes. Bull. Sci. math., II. s. **58**, 52—57 (1934).

Es wird folgender Satz bewiesen: Eine abgeschlossene beschränkte Menge im Raume, die von jeder Geraden in höchstens 2 Punkten geschnitten wird und die mit jeder sie treffenden Ebene ein Kontinuum oder einen Punkt gemeinsam hat, ist entweder eine geschlossene konvexe Fläche oder ein konvexes Flächenstück mit einer ebenen Randkurve. — Ferner wird auf Fragen hingewiesen, die sich auf verwandte Kennzeichnungen der Flächen endlicher Ordnung im Juelschen Sinne beziehen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Mayer, Anton E.: Über Gleichdicke kleinsten Flächeninhalts. Sonderdruck aus: Anz. Akad. Wiss. Wien Nr **7**, 4 S. (1934).

Es wird eine Lösung des folgenden Minimumproblems skizziert: Unter allen Orbiformen mit demselben Minimalkreisring soll die von minimalem Flächeninhalt bestimmt werden. (Wegen der Benennungen vgl. z. B. das Referat dies. Zbl. **7**, 423 einer Arbeit von Bonnesen, in der das entsprechende Maximumproblem gelöst ist.) Die gesuchte Orbiforme erweist sich (in Übereinstimmung mit einer von Bonnesen a. a. O. ausgesprochenen Vermutung) als dasjenige Reuleaux-Polygon, dessen Ecken, evtl. mit einer Ausnahme, auf dem äußeren Kreis des Ringes liegen und dessen Seiten, evtl. mit Ausnahme von dreien, gleich lang sind. Der Beweis beruht zum Teil auf ähnlichen Betrachtungen wie Blaschkes Beweis für die Minimumeigenschaft des Reuleaux-Dreiecks [Math. Ann. **76**, 504—513 (1915)]. — Eine vollständige Darstellung wird angekündigt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Hirakawa, Junkô: An extension of the vectorial domain of an oval for the relative geometry. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16**, 73—76 (1934).

Der Begriff des Vektorenbereichs eines ebenen konvexen Bereichs wird auf zweierlei

Weise relativgeometrisch verallgemeinert. Als Eichbereich wird dabei ein konvexer Bereich angenommen, dessen Schwerpunkt in den Nullpunkt fällt. Diese Beschränkung des Eichbereichs gestattet, aus der Minkowskischen Ungleichung und bekannten Abschätzungen des Inhalts des gewöhnlichen Vektorenbereichs Ungleichungen für Randlänge und Inhalt der relativen Vektorenbereiche zu entnehmen, falls die letzteren konvex sind. Dies ist aber im Gegensatz zur Meinung des Verf. bei der einen Definition nicht allgemein richtig, so daß die Resultate teilweise hinfällig werden. Auch abgesehen davon dürfte dieser Begriffsbildung des Verf. kaum Bedeutung zukommen, da sie nicht translationsinvariant ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Vincensini, P.: Sur les centres de gravité des corps finis homogènes. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 891—893 (1934).

Im Anschluß an Levi-Civita [Atti Accad. naz. Lincei (6) 12, 535—541 (1930)], Tricomi und Ascoli (vgl. dies. Zbl. 3, 75 u. 76) untersucht der Verf. die Menge der Schwerpunkte der ebenen Schnitte eines homogenen Körpers. Es wird vorausgesetzt, daß die Schwerpunkte stetig von den Schnittebenen abhängen; dann erfüllt nach Tricomi die Schwerpunktmenge das ganze Innere Γ der konvexen Hülle des Körpers. Der Verf. bezeichnet einen Punkt von Γ als singulär, wenn er Schwerpunkt von wenigstens zwei verschiedenen ebenen Schnitten ist. Es wird ein Beweis dafür angekündigt, daß die singulären Punkte von Γ kein räumliches Gebiet erfüllen können. Ferner werden Sätze angegeben über Levi-Civitas „orthobare Kurven“ — das sind Kurven, deren Normalebene in einem Kurvenpunkt P den Körper in einem Bereich mit dem Schwerpunkt P schneidet — und über die den Punkten von Γ zugeordneten „Indikatrizten“. Unter der Indikatrix eines Punktes P von Γ versteht der Verf. den Ort der Punkte Q , für die die Entfernung PQ gleich der Entfernung PS ist, wo S der Schwerpunkt des auf PQ senkrechten ebenen Schnittes durch P ist. Von den hierauf bezüglichen Sätzen sei der folgende erwähnt: Stimmen in allen Punkten eines Kontinuums die Indikatrizten zweier Körper überein, so sind die Körper identisch oder homothetische Ellipsoide. Die Beweise sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Cartan, Elie: La cinématique newtonienne et les espaces à connexion euclidienne. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 69—73 (1933).

Es wird gezeigt: Auch die vierdimensionale Zusammenhänge der klassischen Mechanik kann als Kontinuum von euklidischem Zusammenhang gedeutet werden. Man verzieht darauf, jedem Weltpunkt ein invariantes für alle Richtungen definiertes Bogenelement zuzuordnen, definiere vielmehr: Ein Beobachter, der sich relativ zu einem festen System x_i, t ($i = 1, 2, 3$) im Weltpunkt x_i, t mit der Geschwindigkeit u_i bewegt, hat das Bogenelement $ds^2 = dt^2 + \sum (dx_i - u_i dt)^2$ zugrunde zulegen. Sein Koordinatensystem wird von vier (einem zeitlichen und drei räumlichen) orthogonalen Einheitsvektoren t, e_i aufgespannt, so daß das Differential des Weltvektors w sich

$$dw = t dt + \sum_i e_i (dx_i - u_i dt)$$

schreibt. Ein Bewegungsvorgang $x_i = x_i(t)$ ist wie üblich eine (auf die Koordinate t bezogene) Weltlinie w . Jedem Weltpunkt (bzw. Weltvektor) w von w wird ein orthogonales Vierkant t, e_i zugeordnet; für die Geschwindigkeitskomponenten u_i werden die Zahlen $x_i = \frac{dx_i}{dt}$ eingesetzt. Das Entscheidende ist nun die Zusammenhangsvorschrift zwischen den längs w benachbarten Vierkant. Diese Vorschrift lautet:

$$\dot{t} = \sum e_i u_i, \quad \dot{e}_i = -t u_i, \quad \dot{w} = t.$$

Läßt man für die „ausgezeichnete“ Geschwindigkeit u_i die Einschränkung $u_i = x_i$ fallen, so hat man statt der letzten Formel allgemeiner $\dot{w} = t + \sum (x_i - u_i) e_i$ anzusetzen. — Als Anwendung des Verfahrens werden einige einfache Bewegungsgesetze im Sinn dieser Geometrie gedeutet, wobei der Einfachheit halber eine räumliche Dimension unterdrückt wird.

Cohn-Vossen (Zürich).

Teodoriu, Luca: Sur la cinématique du corps solide dans l'espace euclidien à n dimensions. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 243—247 (1933).

Im euklidischen n -dimensionalen Raum E_n bewege sich ein starrer Körper S . P_i ($i = 1, \dots, n$), P_0 seien $n + 1$ Punkte von S , $(R_0)_i$ sei diejenige durch P_i gehende Hyperebene, die auf dem Vektor $v_i - v_0$ senkrecht steht, wobei v_i, v_0 die Geschwindigkeiten von P_i bzw. P_0 sind. Es wird durch Rechnung bewiesen: Je nachdem n gerade oder ungerade ist, haben die $(R_0)_i$ stets einen Punkt oder stets eine Gerade gemein. Haben die $(R_0)_i$ einen von der Lage von P_0 unabhängigen linearen k -dimensionalen Raum ($k < n$) gemein, so gibt es einen k -dimensionalen linearen Raum, dessen Punkte gleiche Geschwindigkeiten haben. Cohn-Vossen (Zürich).

Bouligand, Georges: Sur les ensembles ponctuels entourés de points ordinaires et, en particulier, sur les courbes et les surfaces à courbure bornée. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 3, 135—148 (1934).

Einige elementare Sätze über Punktmengen E mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt, der von E um weniger als d entfernt ist, auf E nur einen Punkt kleinsten Abstandes hat. Unter den Kurven haben diese Eigenschaft nur die stetig differenzierbaren Bögen mit beschränkter oberer Krümmung. Willy Feller (Kopenhagen).

Algebraische Geometrie:

Gherardelli, G.: Sistemi di curve piane doppiamente lineari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 140—144 (1934).

Bestimmung aller ∞^r Linearsysteme ebener algebraischer Kurven, deren Enveloppen ebenfalls Linearsysteme bilden. Für $r = 1$ hat man als Lösungen die Bahnkurven zweier eingliedriger Gruppen von Homographien. Für $r > 2$ müssen die gesuchten Kurven Kegelschnitte sein: entweder bilden sie das ∞^5 -System aller Kegelschnitte, oder das ∞^3 -System der Kegelschnitte, die ein gegebenes Punkt-Gerade-Paar als polare Elemente besitzen, oder das ∞^2 -System der Kegelschnitte, die ein gegebenes Polardreieck besitzen (und besondere Fälle). E. G. Togliatti (Genova).

Vries, Jan de: Eine Abbildung der Kongruenz der kubischen Raumkurven durch vier Punkte, welche eine vorgegebene Gerade zweimal treffen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 129—132 (1934).

Gambier, Bertrand: Tétraèdres inscrits dans une cubique gauche et circonserits à une développable de classe 3 ou à une quadrique. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 532—535 (1934).

Pour une cubique gauche Γ et une quadrique Q arbitraires, on a un seul tétraèdre répondant à la question, dont les sommets sont définis sur Γ par une équation du quatrième degré. L'auteur indique notamment que, si Γ et Q sont telles qu'il existe deux tétraèdres inscrits dans Γ et circonserits dans Q , il en existe ∞^2 . La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les 6 points de rencontre de Γ avec Q soient 2 par 2 sur trois génératrices d'un même système de Q . Si l'on remplace Q par une développable Δ de classe 3, il faut et il suffit pour qu'il existe ∞^1 tétraèdres répondant à la question, que les 12 points d'intersection de Γ avec Δ soient 2 par 2 sur 6 génératrices de Δ . P. Dubreil (Nancy).

Gambier, Bertrand: Tétraèdres inscrits dans une biquadratique et circonserits à une développable de classe 4 et genre I ou à une quadrique. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 878—880 (1934).

Problème analogue au précédent; l'auteur en indique des solutions et compare le nombre de paramètres dont elles dépendent au nombre de conditions à écrire a priori. P. Dubreil (Nancy).

Green, H. G., et L. E. Prior: Généralisation du point de Frégier pour des systèmes en involution sur des courbes de base unicursales. J. École polytechn., II. s. cahier 31, 147—153 (1933).

Durch Nullsetzen einer in $n + 1$ binären Parametern linearen Form entsteht eine Involution $(n + 1)$ -ter Ordnung, die auf einer C^n des R_n gedeutet wird. Die Systeme

von n Punkten, die einen vorgegebenen $(n + 1)$ -ten Punkt P zu einem Punktsystem der Involution ergänzen, werden von den Hyperebenen durch einen Punkt P' des R_n (généralisation du point de Frégier) ausgeschnitten. Wandert P auf der C^n , so läuft P' auf einer Geraden (droite de Frégier). Konstruktion der Involution $(n + 1)$ -ter Ordnung auf der rationalen Normalkurve C^n , insbesondere der Involution 3. Ordnung auf der C^2 . Die Involution $(2n - 1)$ -ter Ordnung auf der C^n . Weiss (Bonn).

Green, H. G., et L. E. Prior: Sur des configurations de Pascal dérivées de sept points sur une cubique gauche. J. École polytechn., II. s. cahier 31, 155—164 (1933).

Eine Involution 4. Ordnung auf der Raumkurve 3. Ordnung wird durch 4 Punktquadrupel bestimmt. 4 Punktquadrupel auf der C^3 bestimmen daher eine Gerade von Frégier. Es wird die Konfiguration aller Geraden von Frégier untersucht, die man erhält, wenn man die Punktquadrupel auf alle möglichen Weisen einem System von 7 fest vorgegebenen Punkten der C^3 entnimmt. E. A. Weiss (Bonn).

Barbilian, D.: Über rationale Normalkurven. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 37—49 (1933).

Wiederholung verschiedener wohl bekannter Sätze über rationale normale Kurven C^n . Auch die Benutzung der Kurve C^n in der Invariantentheorie der binären Formen ist nicht neu [s. die Arbeiten von A. Comessatti, Rend. Acc. Lincei (5) 29 (1920) u. (5) 30 (1921); Rend. Ist. Lomb. 54 (1921); Math. Ann. 89 (1923) u. 90 (1923); s. insbesondere diese letzte Arbeit S. 188—189]. Dann der Satz: Die Räume S_{n-k+1} , die C^n in $k + 1$ Punkten P_i oskulieren, schneiden den Verbindungs S_k der Punkte P_i in $k + 1$ Geraden, deren Grassmannsche Koordinaten, falls $n - k$ ungerade ist, linear verbunden sind.

E. G. Togliatti (Genova).

Longhi, Ambrogio: Alcuni risultati di geometria numerativa per le curve algebriche di uno spazio qualsiasi. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 409—433 (1933).

I. Die meisten Ergebnisse dieser Note sind Anwendungen eines Satzes des Verf. [Bull. Un. mat. ital. 11, 269 (1932)], welcher die Anzahl der Punkttupel einer Kurve C angibt, deren Punkte paarweise in einer vorgegebenen symmetrischen Korrespondenz von der Valenz γ einander zugeordnet sind. Bei den Anwendungen wird die Korrespondenz in verschiedenen Weisen geometrisch erzeugt, z. B. durch ein Polarsystem oder Nullsystem des Raumes. So erhält man z. B. den Satz, daß man in einer irreduziblen Kurve und Ordnung des Raumes S_r $2\binom{n-3}{3}$ Polardreiecke in bezug auf eine gegebene Quadrik einbeschreiben kann. Ebenso, daß es in einer Regelschar n -ter Ordnung mit s isotropen Strahlen i. A. $2\binom{n-3}{3}$ orthogonale Strahlentupel gibt usw. Man findet Sätze über die Anzahlen der dreifachen Punkte und der dreifachen Ebenen einer Regelfläche; über die Ordnung der Regelfläche, die von den Trisekanten einer Raumkurve gebildet wird; über die Anzahlen von Dreiecken, die einer Kurve C des S_r einbeschrieben sind und deren Seiten einem gegebenen Komplex angehören, z. B. eine geg. Hyperfläche berühren oder eine geg. M_{r-2} des S_r treffen usw. II. Es wird gezeigt: Wenn zwischen zwei Systemen Σ und Σ' von ∞^1 Hyperflächen des S_r , von den Klassen k und k' , eine (α, β) -Korrespondenz besteht, so gibt es $k\alpha' + k'\alpha$ Paare dieser Korrespondenz, die einem gegebenen Polarsystem angehören. Von diesem Satz werden Spezialfälle und Anwendungen angegeben. Als Anwendung dieses Satzes und des unter I anfangs zitierten wird u. a. die Anzahl der Dreiecke berechnet, die einer Raumkurve C derart einbeschrieben sind, daß die beiden Ebenen durch eine Dreiecksseite, die in den beiden Endpunkten dieser Seite die Kurve berühren, stets zueinander orthogonal stehen. III. Schließlich der Satz: Die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare in einer symmetrischen (α, α) Korrespondenz von der Valenz γ auf einer Kurve C der Ordnung n des S_r ($r > 2$) bilden eine Regelschar von der Ordnung $\alpha(n - 1) - \gamma p$ und vom Geschlechte $\frac{1}{4}\beta + \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)p - \alpha + 1$, wo β die Anzahl der Verzweigungspunkte der Korrespondenz ist. Wieder werden Spezialfälle und Anwendungen angegeben, von denen wir nur hervorheben die Berechnung des Geschlechtes der Doppelkurve der Mannigfaltigkeit, welche von den Punkten aller oskulierender S_r einer Kurve

C des Raumes S_{2r+1} gebildet wird, sowie die Berechnung der Ordnung und des Geschlechtes der Regelfläche, die von den Geraden gebildet wird, welche je zwei Punkte einer Punktgruppe einer gegebenen linearen Schar g'_r der Kurve C verbinden.

van der Waerden (Leipzig).

Montel, Paul: Sur un théorème de M. Țițeica. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 183—184 (1933).

Bedingung dafür, daß fünf Geraden auf einer Fläche 3. Ordnung liegen, und Schläfli'scher Satz über Doppelsechsen. Alles seit langem bekannt! (S. z. B. E. Bertini, Complementi di geometria proiettiva, S. 248. Bologna 1928.) E. G. Togliatti.

Saddler, W.: On certain equations to the cubic surface, with extensions to higher spaces. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 1—11 (1934).

Verf. geht von zwei bekannten Konstruktionen der allgemeinen Fläche 3. Ordnung aus [erstens die Lürothsche Konstruktion, s. A. Clebsch, Math. Ann. 1, 258—259 (1869), und dann die zweite Konstruktion von H. Schroeter, J. f. Math. 96, 282 (1884)] und findet nach ziemlich langen Rechnungen einige Formen der Gleichung der Fläche. Verallgemeinerungen der zweiten Schroeterschen Konstruktion zur Konstruktion gewisser V_3^4 und V_4^5 im S_4 und S_5 . E. G. Togliatti (Genova).

Vries, Jan de: Gerade Linien auf einer kubischen Fläche. Mathematica, Leiden 2, 257—263 (1934) [Holländisch].

Vries, Jan de: Besondere Monoide. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 47 bis 50 (1934).

Eine Fläche n ten Grades mit $(n-1)$ -fachem Punkte O (Monoid M^n) enthält $n(n-1)$ nach O zielende Geraden a . Ein kubisches Monoid enthält außer den 6 Geraden a noch 15 weitere Geraden. Ein Monoid höheren Grades enthält im allgemeinen keine Geraden außerhalb O . Verf. zeigt, daß es Monoide M^4 gibt, die außer den 12 Geraden a durch O noch eine oder mehrere andere Geraden enthalten. Es gibt 1. Monoide M^4 mit noch 4 Geraden, welche ein vollständiges Vierseit bilden; 2. Monoide M^4 mit noch 8 Geraden, welche 2 Vierseite bilden; 3. Monoide M^4 mit noch 12 Geraden, welche 3 Vierseite bilden; 4. Monoide M^4 mit noch 16 Geraden, welche 5 Vierseite bilden, und 5. Monoide M^4 mit noch 16 Geraden, welche 8 Vierseite bilden. Auch gibt es ein Monoid M^4 mit 19 nicht nach O zielenden Geraden. Weiter zeigt Verf., daß es Monoide M^n gibt, die ein oder zwei vollständige n -Seite tragen. Verf. betrachtet auch Monoide 4ten und 5ten Grades mit einer oder mehreren mehrfachen Geraden. G. Schaake.

Frank, M.: Über die Einseitigkeit von schiefen algebraischen Regelflächen ungerader Ordnung. Rec. math. Moscou 40, 508—512 (1933).

Es werden die ebenen Schnitte einer solchen Regelfläche betrachtet. Es wird behauptet (Ref. ist von der Schlüssigkeit des dazu skizzierten Beweises nicht überzeugt), daß man durch eine Regelgerade eine solche Ebene legen kann, daß der Schnitt (nach Fortlassung der Geraden) im Reellen zusammenhängend und singularitätenfrei ist. Das vorausgesetzt, folgt durch eine elegante Abzählung die Existenz benachbarter ebener Schnitte mit einer ungeraden Anzahl gegenseitiger Schnittpunkte; hieraus aber folgt die Einufrigkeit eines solchen Schnitts, also die Einseitigkeit der Fläche. Sie heißt „eigentlich“ einseitig, wenn es einen solchen einufrigen Schnitt gibt, der ganz im Endlichen liegt. Es werden mehrere eigentlich einseitige Regelflächen 3. Ordnung von besonders einfacher kinematischer Erzeugung angegeben. Cohn-Vossen (Zürich).

Cherubino, Salvatore: Le trasformazioni pseudo-ordinarie delle superficie iperellittiche reali. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 693—723 (1933).

En se basant notamment sur ses précédentes recherches sur le sujet [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 257, 362 (1933), ce Zbl. 7, 77; Atti Accad. Sci. Napoli 20, 11 (1933)], l'a. donne la classification et la construction du groupe des transformations pseudo-ordinaires relatif à une surface hyperelliptique du type réel. Il y a essentiellement trois cas à distinguer, suivant que le groupe susdit comprend seulement des transformations ordinaires; ou bien il est formé par quatre systèmes continus, deux

de transformations ordinaires et deux de transformations singulières; ou enfin il est constitué par une infinité discontinue de systèmes continus. *Beniamino Segre.*

Godeaux, Lucien: Sur le plan double ayant comme courbe de diramation l'ensemble de trois coniques deux à deux bitangentes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 1—7 (1934).

Le plan double considéré est birationnellement équivalent à une surface du 4^e ordre possédant un point double conique et 6 points doubles biplanaires de seconde espèce, et admettant un groupe de transformations birationnelles involutives en elles-mêmes n'ayant qu'un nombre fini de points unis. L'involution engendrée par ces transformations est représentée par une surface du quatrième ordre de genres un possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires et trois points doubles coniques. Il existe 7 plans touchant cette surface suivant des coniques irréductibles. *P. Dubreil.*

Godeaux, Lucien: Sur la détermination d'une transformation birationnelle involutive du sixième ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 44—47 (1934).

Godeaux, Lucien: Sur les points unis fondamentaux d'une involution du second ordre appartenant à une surface algébrique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1237 bis 1243 (1933).

L'auteur étudie les différents cas qui peuvent se présenter (points infiniment voisins du point uni fondamental A unis ou non pour l'involution considérée I_2). Il insiste surtout sur un cas, dans lequel on peut prendre comme image de l'involution une surface possédant un point double biplanar ordinaire. *P. Dubreil (Nancy).*

Demelenne, Joseph: Sur une transformation birationnelle plane de période trois. Mathesis 48, 103—105 (1934).

Linsman, M.: Sur les transformations birationnelles de l'espace dépourvues de courbes fondamentales. I. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1254—1262 (1933).

Etude des transformations birationnelles de l'espace qui se déduisent du système des quadriques passant par les sommets d'un tétraèdre et ayant un plan tangent fixe en l'un d'eux, dans les différents cas particuliers où ce système admet des points-base confondus. *P. Dubreil (Nancy).*

Villa, Mario: Sulle trasformazioni pseudocremoniane. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 4, 93—110 (1933).

Eine quadratische Transformation zwischen zwei Ebenen π, π' kann nach F. Seydewitz mit Hilfe von zwei Paaren projektiver Strahlenbüschel $A, A'; B, B'$ definiert werden; wenn man die Projektivität zwischen A, A' beibehält und diejenige zwischen B, B' durch eine Antiprojektivität ersetzt, bekommt man zwischen π, π' eine neue Art Ω von Transformationen, die hier als Pseudo-Cremonasche Verwandtschaften bezeichnet werden. Den Geraden von π (oder π') entsprechen in π' (oder π) die „Pseudo-kegelschnitte“ eines homaloidischen Netzes \mathcal{A} , d. h. Gebilde, die durch zwei antiprojektive Strahlenbüschel erzeugbar sind. Die Transformation Ω kann durch die Formeln: $x'_1 = x_2 \bar{x}_3$, $x'_2 = \bar{x}_1 x_3$, $x'_3 = \bar{x}_1 x_2$ analytisch dargestellt werden (wo \bar{x}_i die komplexkonjugierte Größe von x_i bedeutet) und besitzt in jeder Ebene drei singuläre Punkte. Das Netz \mathcal{A} enthält verschiedene Arten von Pseudokegelschnittbüscheln, die vollständig diskutiert werden. Ein Pseudokegelschnitt kann auch durch eine Projektivität zwischen einem Strahlenbüschel und einem Büschel ebener „Ketten“ (in einer gewissen Lagenbeziehung) erzeugt werden; und Ω kann auch durch eine Projektivität zwischen einem homaloidischen Kegelschnittnetz und einem Netz ebener Ketten definiert werden usw. Schließlich werden sog. „hyperalgebraische Vierseite“ betrachtet, Gebilde, die durch eine geeignete Transformation Ω in „Hyperkegelschnitte“ verwandelt werden. *E. G. Togliatti (Genova).*

Williams, A. R.: The apparent contour of the general V_3^n in S_4 . Bull. Amer. Math. Soc. 40, 103—110 (1934).

Bestimmung der projektiven Charaktere (Ordnung, Ordnung der Kuspidal- und Doppellinien und Anzahl der den beiden Linien gemeinsamen Punkte, Anzahl der

dreifachen Punkte, Charaktere des umschriebenen Kegels usw.) der Umrißfläche F einer allgemeinen Hyperfläche V_3^n des Raumes S_4 auf eine Hyperebene; sowohl für eine allgemeine Lage des Projektionszentrums 0, als auch im Falle wo 0 auf V_3^n liegt. (Die Werte von Δ und h s. 106 unten stimmen nicht.) *E. G. Togliatti* (Genova).

Segre, Beniamino: *Intorno alla parità di alcuni caratteri di una varietà algebrica di dimensione dispari.* Boll. Un. Mat. Ital. 13, 93—95 (1934).

Die Zeuthen-Segresche Invariante I einer algebraischen Mannigfaltigkeit V von ungerader Dimension ist eine gerade Zahl. Dasselbe gilt von der Invariante Ω_0 , dem virtuellen Grade des kanonischen Systems. Auch die Klasse einer Hyperfläche mit nur normalen Singularitäten in einem S_{2m} ist gerade. Diese Ergebnisse werden teilweise topologisch, teilweise algebraisch-geometrisch bewiesen. *van der Waerden* (Leipzig).

Differentialgeometrie:

Cisotti, U.: *Deduzioni differenziali dalla definizione di vettori reciproci. — Quoziente vettoriale e derivazione vettoriale.* V. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 3—8 (1934).

Wenn \mathbf{a} , \mathbf{b} zwei Vektoren in einem dreidimensionalen euklidischen Raume sind, so wird mit $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ die Größe $\frac{a^\nu b^\lambda - b^\nu a^\lambda}{(b)^\lambda}$ bezeichnet, die in diesem speziellen Raume auch als ein Vektor aufgefaßt werden kann. Auf diese Weise werden verschiedene Formeln der Differentialgeometrie umgeschrieben (vgl. dies. Zbl. 7, 228; 8, 83 u. 178).

Hlavatý (Praha).

Tardos, Vida: *Über singuläre Punkte von Raumkurven.* Mitt. math. Semin. Univ. Debrecen H. 9, 1—25 u. dtsh. Zusammenfassung 26—30 (1934) [Ungarisch].

Es handelt sich um die Untersuchung der singulären Punkte der Raumkurven mit der Methode der natürlichen Geometrie. Es wird angenommen, daß die Krümmung und die Torsion als Funktion der Bogenlänge s sich in der Umgebung jedes Punktes $P_0(s_0)$ so verhält wie eine algebraische Funktion. Durch die kleinsten Exponenten von $s - s_0$ in den Reihenentwicklungen der Krümmung und der Torsion werden die singulären Punkte der Raumkurve charakterisiert (wo eine der vier Zahlen: Krümmung, Torsion und ihre Reziproken verschwindet). Es werden auch die Bedingungen untersucht, unter denen eine Kante des begleitenden Trieders oder die Schmiegeebene für $s \rightarrow \infty$ eine Grenzlage hat. Endlich werden zwei Beispiele angeführt. Die Krümmung und die Torsion der Raumkurve haben im ersten Beispiel zu der Bogenlänge dasselbe konstante Verhältnis. Im zweiten Beispiel werden die Rückkehrpunkte der Rollkurven gesucht.

Sz. Nagy (Szeged).

Bouligand, Georges: *Sur les systèmes orthogonaux du plan et de l'espace à trois dimensions.* Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 57—67 (1933).

Einige Bemerkungen über die Einbettbarkeit von Kurven und Flächen in ein Orthogonalsystem. Angabe hinreichender Differenzierbarkeitsbedingungen dafür, daß in einem Orthogonalsystem die Richtungen der Schnittkurven auf jeder Fläche konjugiert sind (konjugierte Richtungen werden dabei durch die Charakteristik der Tangentialebenen längs der Kurven definiert).

Willy Feller (Kopenhagen).

Drâmba, Constantin: *Courbes loxodromiques sur une surface.* Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 107—110 (1933).

Das sind die Kurven, die die Höhenlinien einer Fläche unter festem Winkel treffen; also insbesondere gehören dazu die Gefällkurven, wo dieser Winkel ein rechter ist. Es werden besonders die Flächen betrachtet, für die die senkrechte Projektion der Höhen- und Gefällkurven auf eine Horizontalebene ein Isothermennetz ist. Verlangt man außerdem, daß die Gefällkurven geodätisch seien, so erhält man Flächen F , die auf Rotationsflächen derart abwickelbar sind, daß die Höhenlinien Breitenkreise werden. Es wird behauptet, daß diese Flächen F außerdem Minimalflächen seien.

Cohn-Vossen (Zürich).

Myller, A.: Sulla flessione delle superficie rigate. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 74—76 (1934).

Die Asymptotenebene eines variablen Strahls der Regelfläche F hüllt eine Torse T ein, deren Erzeugende den entsprechenden von F parallel sind; wird eine Ebene e so bewegt, daß sie, ohne zu gleiten, auf T abrollt, so enthält e in jeder Lage eine Erzeugende von F . Diese Geraden hüllen eine Kurve k auf e ein, die das Profil von F heißen möge. Wird k beim Abrollen von e mitgeführt, so zeigt sich, daß k jede Erzeugende von F gerade im Kehlpunkt berührt. Die von k überstrichene Fläche berührt also F längs der Kehllinie. — Die Gestalt des Profils von F ändert sich nicht, wenn man F so verbiegt, daß F Regelfläche bleibt. Hieraus ergibt sich nicht nur, daß man F als Regelfläche so verbiegen kann, daß T vorgegebenen Asymptotenkegel hat, sondern auch so, daß T vorgegebene Leitkurve hat. Dabei heißt Leitkurve einer Torse die ebene Kurve, in die die Rückkehrkante übergeht, wenn man die Torse in die Ebene abwickelt.

Cohn-Vossen (Zürich).

Hedlund, Gustav A.: On the metrical transitivity of the geodesics on a surface of constant negative curvature. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 136—140 (1934).

Neuer Beweis des folgenden Satzes von Myrberg [Ein Approximationssatz für die Fuchsschen Gruppen, Acta math. 57, 389—409 (1931), auch dies. Zbl. 1, 2]: Fast alle geodätischen Linien einer geschlossenen Fläche konstanter negativer Krümmung sind quasiergodisch, d. h. sie haben die Eigenschaft, unbegrenzt auf der Fläche fortgesetzt jeden geodätischen Bogen mit jeder Genauigkeit zu approximieren. Myrberg.

Levi-Civita, T.: Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria. Compositio Math. 1, 115—162 (1934).

In der Umgebung eines Punkts O auf einer Fläche F seien drei Kurvenscharen $f_h(u, v) = \text{konst.}$ ($f_{h+3} \equiv f_h$; u, v hinreichend reguläre Parameter auf F um O) gegeben, so daß sich verschiedene Kurven nirgends berühren, also durch jeden Punkt genau drei Kurven, und zwar in verschiedenen Richtungen hindurchgehen. Wie leicht zu sehen, wird dadurch ein Umlaufssinn auf dem Flächenstück ausgezeichnet, und nachdem man die Kurven einer der Scharen willkürlich orientiert hat, ergibt sich eindeutig eine Orientierung der beiden andern Scharen derart, daß alle durch das Tripel gebildeten Dreiecke den vorerwähnten Umlaufssinn erhalten. ds_h sei der Größe und Richtung nach das Bogendifferential auf $f_h = \text{konst.}$, ψ_h der Winkel

zwischen ds_{h+1} und ds_{h+2} , also $0 < \psi_h < \pi$, $\sum_{h=1}^3 \psi_h = 2\pi$. Es wird nun zunächst

ein übersichtlicher formaler Apparat für das Rechnen mit dreifachen Kurvenscharen aufgestellt. Sei nämlich X_h der Operator $\sin \psi_h \frac{d}{ds_h}$, dann folgt zunächst $\sum_{h=1,2,3} X_h \equiv 0$,

während je zwei verschiedene X_h unabhängig sind. Setzt man $X_h X_{h+1} - X_{h+1} X_h = Y$, so ist Y wieder ein linearer Operator, der sich als unabhängig von h erweist. Setzt man an: $Y = \sum_h b_h(uv) X_h$, so sind die b_h bis auf eine gemeinsame additive Ortsfunktion bestimmt.

Anwendung: Damit das Schartripel ein Sechsecksgewebe im Blaschkeschen Sinn bilde, ist notwendig und hinreichend: $\sum_h X_h(b_h) = 0$. — Nimmt

man zu den Richtungs- noch die Krümmungsgrößen hinzu, seien also γ_h die (mit naturgemäßer Vorzeichenbestimmung berechneten) geodätischen Krümmungen im Tripel, so hat man zunächst folgende merkwürdige Identität: $X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1} = \sum_h \gamma_h \sin \psi_h$. Die linke Seite der Gleichung ist also nur scheinbar von h ab-

hängig. Durch etwas kompliziertere Rechnungen werden die vorerwähnten b_h als Ausdrücke berechnet, die in den trigonometrischen Funktionen der ψ_h homogen linear sind; als Koeffizienten treten die γ_h und die Ausdrücke $X_h \psi_{h+1} + X_{h+1} \psi_h$ auf. Nun werden kleine aber endliche Dreiecke aus Scharkurven betrachtet. l_h seien die (Längen der) Dreiecksseiten, α_h die Innenwinkel, also $\alpha_h = \pi - \psi_h$. Haupt-

ergebnis: Setzt man $\frac{1}{3} \sum_h \frac{l_h}{\sin \alpha_h} = l$, so gilt der „Sinussatz“: $l_h = l(1 + l g_h) \sin \alpha_h$.

Hierbei ist g_h von der Form $g_h = m_h + l n_h$, wobei m_h ein in den trigonometrischen Funktionen der α_h und den (in irgendeinem Punkt des Dreiecks gemessenen) geodätischen Krümmungen γ_h bilinearer wohlbestimmter Ausdruck und n_h für kleines l beschränkt ist. Der Sinussatz gibt also eine Näherungsrelation bis einschließlich zur 2. Ordnung in l . — Zum Schluß wird durch Grenzübergang ein Ausdruck der Gaußschen Krümmung abgeleitet, der die bekannte Formel für infinitesimale geodätische Dreiecke verallgemeinert. Cohn-Vossen (Zürich).

Delgleize, A.: Sur les transformations des surfaces. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1291—1293 (1934).

L'auteur généralise la transformation T_m de Guichard des surfaces isothermiques. Étant donnée une surface Σ rapportée à ses lignes de courbure, d'élément linéaire $ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2$, et une surface Σ' , transformée R de Σ , définie par les fonctions λ, μ, w, φ de Guichard, l'auteur construit une surface $\bar{\Sigma}$ d'élément linéaire $ds^2 = \frac{1}{\varphi^2} (H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2)$ et telle que les rayons de courbure principaux ϱ_1, ϱ_2 de $\bar{\Sigma}$ et r_1, r_2 de Σ soient liés par les équations $\frac{1}{\varrho_1} = a \left(w - \frac{\varphi}{r_1} \right), \frac{1}{\varrho_2} = a \left(w - \frac{\varphi}{r_2} \right)$ où a est une constante, à seule condition que les coefficients de l'élément linéaire de Σ' , $H_1'^2, H_2'^2$ et les fonctions λ, μ, w, φ satisfont l'équation

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} (a^2 - 1) + \frac{a^2}{2} (\lambda^2 + \mu^2 + w^2) \left(\frac{H_1'}{H_1} + \frac{H_2'}{H_2} \right) = 0.$$

Si $a^2 = 1$, les surfaces $\Sigma, \Sigma', \bar{\Sigma}$ sont isothermiques; sinon — $\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma}'$ sont deux surfaces de Guichard associées. S. Finikoff (Moscou).

Picasso, Ettore: Curvatura di una linea piana nella geometria differenziale metrica, affine e proiettiva. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 3, 135—140 (1933).

L'auteur détermine la courbure en question comme le rapport de l'angle non euclidien de deux normales infiniment voisines à l'arc correspondant de la courbe. Il prend comme absolu le cercle osculateur de la courbe pour calculer cet angle dans la géométrie métrique. Dans la géométrie affine il détermine l'angle des deux normales affines en prenant pour l'absolu la parabole osculatrice; dans la géométrie projective — la conique osculatrice; comme l'arc de la courbe intervient l'arc affine ou projectif respectivement. S. Finikoff (Moscou).

Kanitani, Jôyô: Sur la déformation projective d'une courbe gauche. Mem. Ryojun Coll. Engng 6, 147—154 (1933).

Zwei Raumkurven $C(u)$ und $C_1(u)$ sollen sich punktweise entsprechen, die Korrespondenz soll mittels derselben Werte von u hergestellt werden. Der laufende Punkt P von C soll mittels einer Projektivität Π in den entsprechenden Punkt P_1 transformiert werden. Dann läßt sich beweisen, daß Π folgende Eigenschaften besitzen kann: a) Wenn $Q \rightarrow P$ (Q auf C), so ist der projektive „Abstand“ $[Q Q_1]$ (wegen der Definition des Abstandes muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden) unendlich klein von 4ter Ordnung in bezug auf $[P_1 Q_1]$. b) Der Oskulationskegelschnitt zur Kurve, in welcher die Torse von C von der Oskulationsebene von C in P durchgeschnitten wird, übergeht in den — in derselben Weise definierten — Kegelschnitt von C_1 . — Wenn außerdem auch die kubischen Oskulationskurven in $P = P_1$ in sich übergehen, so heißt Π „eine projektive Deformation“. Insbesondere werden die projektiven Deformationen einer Kurve in sich studiert. — Bei der Untersuchung von Π kommen die Koeffizienten der „Frenetschen“ Formeln zur Geltung. V. Hlavatý (Praha).

Kimpara, Makoto: Sur les courbes extrémales d'un arc projectif. Mem. Ryojun Coll. Engng 6, 175—180 (1933).

Die Koeffizienten der kanonischen Entwicklung

$$z^3 = \frac{1}{2} \sum_1^2 H_{\lambda\mu} z^\lambda z^\mu + \frac{1}{3} \sum_1^2 K_{\lambda\mu\nu} z^\lambda z^\mu z^\nu + \dots$$

der lokalen nichthomogenen Koordinate z^3 (Kanitani, Jôyô: Géométrie différentielle projective des hypersurfaces, Ryojun: Coll. Engrg. 1931; dies. Zbl. 5, 261) können bekanntlich zur Definition von verschiedenen Bogenelementen (und damit zusammenhängenden Begriffen der „Geodetischen“) gebraucht werden. Der Verf. studiert die mit dem Bogenelemente

$$(ds)^3 = \frac{1}{3} E \sum_1^2 K_{\lambda\mu\nu} du^\lambda du^\mu du^\nu, \quad (E = \sum_1^2 K_{\lambda\mu\nu} K^{\lambda\mu\nu})$$

zusammenhängenden Geodetischen (Extremalkurven). Insbesondere wird gezeigt, daß alle Oskulationsebenen dieser Kurven in einem Flächenpunkte einen Kegel 5. Klasse umhüllen, der von der Tangentialebene in den asymptotischen Richtungen berührt wird. Außerdem wird auch die Polarkurve dieses Kegels in bezug auf die Liesche Quadrik untersucht. *Hlavatý (Praha).*

Demoulin, A.: Sur deux transformations des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux ou trois points caractéristiques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1352 bis 1363 (1933).

L'a., en se rattachant à deux précédentes communications ayant le même titre de celle-ci [Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 479—502 et 579—592 (1933); v. ce Zbl. 7, 365 (1933)], étudie particulièrement les couples de congruences qu'il appelle des couples W_2 , dont il assigne des transformations intéressantes. — Un couple W_2 est constitué par deux congruences rectilignes, Γ_1 et Γ_{-1} , n'appartenant pas à un même complexe linéaire, se correspondant droite par droite, et telles qu' on en puisse répartir les droites en une infinité de surfaces non homologues entre elles, R_1 et R_{-1} , de façon que, si a_1, a_{-1} sont deux droites correspondantes quelconques de Γ_1, Γ_{-1} , les surfaces réglées R_1 et R_{-1} qui passent par a_1 et a_{-1} aient le long de ces droites une même demi-quadrique osculatrice. — Dans ces hypothèses on a que Γ_1, Γ_{-1} sont des congruences W , dont les nappes focales sont resp. touchées par les surfaces R_1, R_{-1} suivant des lignes asymptotiques; de plus, la correspondance qui existe entre les congruences Γ_1, Γ_{-1} induit entre leurs nappes focales une correspondance, qui a lieu avec conservation des lignes asymptotiques. *Beniamino Segre (Bologna).*

Pantazi, Al.: Sur certaines congruences spéciales. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 205—217 (1933).

Eine Liniengkongruenz heißt CD , falls dieselbe so in eine Schar von Regelflächen zerlegt werden kann, daß die Fleknodallinien der Regelflächen die Brennflächen der Kongruenz erzeugen und auf diesen Brennflächen je ein System Darbouxscher Linien bilden. Falls eine Kongruenz CD nicht W ist, so bilden auf jeder Brennfläche die asymptotischen Tangenten mit den Bildern der asymptotischen Tangenten der anderen Brennfläche ein Doppelverhältnis, das längs der vorhin erwähnten Darbouxschen Linien konstant ist. Falls eine Kongruenz CD gleichzeitig W ist, so entsprechen einander alle drei Scharen der Darbouxschen Linien der beiden Brennflächen, so daß zwei Fälle möglich sind. Im ersten Fall, der von vier willkürlichen Funktionen abhängt, gehört die Kongruenz einem linearen Komplex an. Im zweiten Fall (dann heiße die Kongruenz CF) ist die Kongruenz vom Fubinischen Typus mit isothermo-asymptotischen Brennflächen. Es gibt Kongruenzen, die auf dreierlei Art CF sind; sie hängen von vier Konstanten ab und können vollständig bestimmt werden. *Čech (Brno).*

Ermolaev, Z.: Congruences rectilignes dont les normales des deux nappes focales engendrent un couple stratifiable. Bull. Sci. math., II. s. 58, 78—79 (1934).

Deux congruences K et K' forment un couple stratifiable si leurs rayons r et r' se correspondent d'une façon biunivoque et l'on peut trouver deux familles de surfaces \mathcal{Z}' et \mathcal{Z}'' telles que leurs plans tangents au point où chacune coupe r vont concourir suivant r' et vice versa. L'auteur démontre que la propriété désignée au titre caractérise des congruences pseudosphériques. *S. Finikoff (Moscou).*

Vincensini, Paul: Sur une transformation des congruences rectilignes et sur les invariants associés. *Rec. math. Moscou* **40**, 467—492 (1933).

Deux congruences (C) et (I') données, la transformation $T(I', \alpha)$ de (C) se produit si l'on tourne chaque rayon D de (C) de l'angle α autour du rayon A de (I') parallèle à D . Si (I') dégénère en ∞^2 droites issues de 0, la transformation est $T(0, \alpha)$. Le produit des distances algébriques de deux foyers de D à la projection de 0 sur D ainsi que la distance des points limites de D restent invariants au cours de $T(0, \alpha)$. Les congruences cycliques (dont les cycles passent par 0) et les congruences isotropes conservent leur propriété pendant la transformation $T(0, \alpha)$. Beaucoup de propriétés particulières. Exemple: les transformées par $T\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ des congruences pseudo-sphériques, sont les congruences à enveloppée moyenne sphérique pour lesquelles la distance des couples de points limites associées est constante. *S. Finikoff (Moscou).*

Rozet, O.: Sur les congruences de droites. *Bull. Acad. Roy. Belg., V. s.* **20**, 140 bis 150 (1934).

M. E. Bompiani [*Rend. Circ. mat. Palermo* **46**, 91 (1922)] a introduit sur les surfaces des hyperespaces les systèmes conjugués d'espèce ν (≥ 1), qui — pour $\nu = 1$ — se réduisent aux systèmes conjugués ordinaires ou réseaux. La théorie classique de la transformation de Laplace relative à ces derniers, a été ensuite étendue aux systèmes conjugués d'espèce ν quelconque par B. Segre [*Ann. Ecole norm.* (3) **44**, 153 (1927)], qui a aussi particulièrement étudié les systèmes conjugués de 2^e espèce qu'il nomme grilles, pour lesquels les deux familles de lignes qui constituent le système ont des rôles échangeables (ce qui, pour $\nu > 1$, n'a pas lieu dans tous les cas) [*Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (3) **20** (1928); *C. R. Acad. Sci., Paris* **184**, 268 (1927)]. — Ici l'a. démontre par le calcul que, si l'on représente — de la façon bien connue — les droites de l'espace S_3 avec les points d'une quadrique de S_5 , une congruence K quelconque de droites de S_3 est transformée dans une surface de S_5 , sur laquelle — en correspondance aux asymptotiques des deux nappes focales de K — on a deux grilles. Ce fait remarquable (qui aurait pu aussi se tirer tout de suite, sans calculs, des résultats généraux de B. Segre) est employé par l'a. avec succès, dans l'étude des congruences de droites. Ainsi l'invariant \mathfrak{S} de B. Segre, relatif à une des deux grilles susdites, correspond à l'invariant W de G. Fubini-E. Čech relatif à K ; les cinq invariants projectifs absolus \mathfrak{E} , attachés par B. Segre à une surface quelconque de S_5 , donnent lieu à cinq invariants projectifs nouveaux de K ; etc. *Beniamino Segre (Bologna).*

Môri, Yasuo: Über einige Eigenschaften der polaren Kongruenzen. I. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **10**, 59—61 (1934).

Considérons une congruence de droites, H_1 , dont un rayon l_1 passe par un point P d'une surface S : le conjugué harmonique de P par rapport aux deux foyers de H_1 situés sur l_1 , est nommé le point de Kœnigs relatif aux éléments envisagés. Par dualité, en se rapportant—au lieu de H_1 —à la congruence H_2 polaire de H_1 par rapport à une quelconque, Q , des quadriques de Darboux que la surface S admet en P , on obtient un plan de Kœnigs. — L'a. démontre que la condition nécessaire et suffisante afin que Q soit la quadrique de Lie, est que le point et le plan de Kœnigs (relatifs à deux congruences polaires quelconques) soient mutuellement polaires par rapport à Q . *Beniamino Segre (Bologna).*

Môri, Yasuo: Einige Eigenschaften der polaren Kongruenzen in der projektiven Flächentheorie. II. Über zwei Quadriken von Darboux. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **10**, 62—64 (1934).

En s'appuyant sur ce qui précède, l'a. parvient à caractériser d'une façon nouvelle la quadrique de Wilczynski-Bompiani, et—par dualité—une autre quadrique, qu'il nomme la quadrique de Kœnigs. *Beniamino Segre (Bologna).*

Lagrange, René: Sur une classe de congruences de cercles. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 788—790 (1934).

Diese Klasse der „*D*-Kongruenzen“ ist durch die Eigenschaft definiert, daß die vier Brennpunkte jedes Kreises der Kongruenz zwei Paare von Diametralpunkten bilden. Die verbindenden Durchmesser mögen Fokaldurchmesser, die zugehörigen Normalen der Brennfläche Fokalnormalen heißen. a sei die Achse des allgemeinen Kreises k der *D*-Kongruenz, A, A' die Brennpunkte von a in der von a erzeugten Geradenkongruenz. Dann wird bewiesen: Die Fokalebenen von a und die Fokaldurchmesser von k haben dieselben winkelhalbierenden Ebenen. Es wird ferner behauptet: Die Fokalnormalen treffen a , und zwar liegen die Schnittpunkte jedes zum selben Fokaldurchmesser gehörenden Normalenpaares harmonisch zu A, A' . Umgekehrt ist eine Kreiskongruenz notwendig eine *D*-Kongruenz, wenn es einen Fokaldurchmesser (in jedem Kreis) gibt und die Fokalnormalen in seinen Endpunkten die Brennstrecke der Kreisachse harmonisch (nichtausgeartet) teilen. Im Ausartungsfall, daß diametrale Fokalnormalen der *D*-Kongruenz die Kreisachse a stets in einem Brennpunkt, etwa A , treffen, kann man die von A erzeugte Fläche beliebig unter kongruenter Mitführung der Figur (A, a, k) verbiegen, ohne daß die von k erzeugte Kreiskongruenz aufhört, *D*-Kongruenz der erwähnten Art zu sein. Das Analoge gilt für den Fall, daß A keine Fläche, sondern nur eine Kurve erzeugt. — Läßt man einen Punkt P eine Minimalfläche S durchlaufen und fällt von einem beliebigen festen Raumpunkt R aus das Lot RQ auf die Tangentialebene p von S in P , so bilden die in p über PQ als Durchmesser errichteten Kreise eine *D*-Kongruenz.

Cohn-Vossen (Zürich).

Lagrange, René: Sur les congruences de cercles qui ont deux diamètres focaux. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1289—1291 (1934).

Vgl. vorst. Referat. Ein Kreis $K(u, v)$ erzeuge eine *D*-Kongruenz. Dann wird ein Kreis $K'(u, v)$ auf verschiedene Weisen so auf $K(u, v)$ geometrisch bezogen, daß auch K' eine *D*-Kongruenz erzeugen muß. Die einfachste solche Beziehung ist: K' in der Ebene von K , konzentrisch mit K und von konstanter Differenz der Radiusquadrate mit K . Ferner sei eine starre Figur aus zwei Kreisen gegeben. Es wird untersucht, ob man diese Figur einer 2-parametrischen Bewegungsschar derart unterwerfen kann, daß die Kreise 2 *D*-Kongruenzen erzeugen. Wenn die Mittelpunkte beider Kreise (nicht Kurven, sondern) zwei Flächen beschreiben, so sind diese durch Bäcklundtransformation aufeinander bezogen. — Ferner wird angegeben, wie man eine *D*-Kongruenz konstruieren kann, wenn die Kongruenz der Kreisachsen vorgegeben ist. Zum Schluß wird eine Eigenschaft der Unterklasse von *D*-Kongruenzen erwähnt, die dadurch definiert ist, daß die Fokalnormalen eines Fokaldurchmessers sich in einem Brennpunkt der Kreisachse schneiden.

Cohn-Vossen (Zürich).

Takasu, Tsurusaburo: Berichtigung zur Differentialkugelgeometrie. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 23, 139—140 (1934).

Takasu, Tsurusaburo: Nouvelles démonstrations de quelques théorèmes sur les surfaces à lignes de courbure sphériques. Sonderdruck aus: Tokio-Butsurigakko-Zasshi 507, 6 S. (1934).

Diese Flächen werden mit synthetischen Methoden der Kugel-Differentialgeometrie untersucht; 4 Kugeln, insbesondere 4 konsekutive Kugeln, die jene Krümmungslinien enthalten, lassen sich stets als Ebenen einer nichteuklidischen Raumgeometrie auffassen, und diese ∞^1 mit der Fläche verbundenen nichteuklidischen Räume führen zu einer Abbildung der Fläche auf eine isotrope Torse. Auf diese Weise erhält man z. B. einen anschaulichen Beweis des Satzes von Bompiani: Wenn in einem System sphärischer Krümmungslinien ein Kreis vorkommt, so sind alle Krümmungslinien des Systems Kreise.

Cohn-Vossen (Zürich).

Jacques, R.: Sur certaines congruences de sphères. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 880—882 (1934).

Une famille de ∞^2 sphères forme une congruence lorsque cinq quantités X_i (trois

coordonnées du centre $X_i = x_i$ et deux autres définies par les équations $X_4 + iX_5 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$, $X_4 - iX_5 = -1$, R étant le rayon de la sphère) satisfait à la même équation de Laplace (*), donc déterminent une congruence de droites dans E_5 . L'auteur examine la congruence (Σ) des sphères de courbure d'une surface S .

L'équation (*) en question admet la solution $X_6 = iR$; on a donc $\sum_{i=1}^6 X_i^2 = 0$. Les congruences transformées de Laplace sont: 1°, la congruence (Σ) relative aux deuxièmes centres de courbure; 2°, la congruence des sphères osculatrices à la deuxième famille de lignes de courbure. Le réseau correspondant dans E_5 est un réseau I de Guichard. A la fin de la Note l'auteur signale le problème: déterminer une congruence (Σ) dont la transformée de Laplace de certain ordre est une congruence (Σ) d'une autre surface (S') c.-à-d. trouver dans E_5 une suite de Laplace contenant deux réseaux I .

S. Finikoff (Moscou).

Agostinelli, Cataldo: Sopra una interpretazione meccanica del parallelismo di Levi-Civita. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 1343—1352 (1933).

An investigation of the motion of a rigid material system consisting of n pairs of particles situated symmetrically on n mutually perpendicular directions tangent at a point Q of a manifold V_n , and the relation of this motion to Levi-Civita parallelism. The same problem was considered by Haimovici (this Zbl. 7, 33) who used the tensor calculus instead of the vector methods employed in this paper. *H. S. Ruse*.

Zupančič, Richard: Une propriété du déplacement parallèle d'après M. Levi-Civita. Publ. Math. Univ. Belgrade 2, 60—65 (1933).

In einem euklidischen n -dimensionalen Raum N sei ein linearer k -dimensionaler Unterraum K gegeben sowie ein Vektor a mit den Komponenten a_i . Ein in K gelegener Vektor b mit den Komponenten b_i heiße „möglichst parallel“ zu a , wenn $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2$ möglichst klein wird. Man sieht leicht, daß dann b die Orthogonalprojektion von a auf K sein muß. — Ist nun a Tangentialvektor einer k -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit V in N , und ist b ein a benachbarter Tangentialvektor von V , der aus a durch Levi-Civitaschen Parallelismus hervorgeht, so ergibt leichte Rechnung: b ist im zugehörigen Tangentialraum K von V möglichst parallel zu a .

Cohn-Vossen (Zürich).

Onicescu, O.: Sur la translation analytique et ses invariants. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 189—204 (1933).

Es sei R ein Gebiet im n -dimensionalen Riemannschen Raume, bezogen auf die Koordinaten x_1, \dots, x_n . Als analytische Translation in R wird jede Transformation $T_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ innerhalb R bezeichnet, die jeden Punkt $X(x_1, \dots, x_n)$ in $X_\alpha(x_1 + \alpha_1, \dots, x_n + \alpha_n)$ überführt. Es werden Invarianten der analytischen Translationen vorwiegend von der Form $\int_{D_0} F(x_1 + \alpha_1, \dots, x_n + \alpha_n) dx_1 \dots dx_n - F$ stetig

in R , $D_0 \subset R$ vorausgesetzt — untersucht. In den Fällen $n = 1, 2, 3$ und für einfache linear berandete Bereiche werden die Funktionen F durch gewisse Periodizitätseigenschaften charakterisiert.

O. Borivka (Brno).

Efimoff, N.: Über Systeme geodätisch paralleler Hyperflächen mit Nabelpunkten. Rec. math. Moscou 40, 504—507 u. dtsh. Zusammenfassung 507 (1933) [Russisch].

Given a system of geodetically parallel hypersurfaces S ; if C is a geodesic of the congruence orthogonal to S and if the points of C are umbilical points of the hypersurfaces S , then the Riemannian curvature of the space at these points for the orientation determined by the tangent vector to C and an arbitrary vector λ is independent of λ . The proof is very neat but superfluous, since the fact is obvious geometrically if one notes that the lines of curvature at an umbilical point are indeterminate. The second theorem of this paper is the extension of the above result to hypersurfaces all of whose points are umbilical.

M. S. Knebelman (Princeton).

Agostinelli, C.: Le condizioni di Saint-Venant per le deformazioni di una varietà riemanniana generica. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 22—26 (1934).

Die Beendigung der unter demselben Titel veröffentlichten Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 325) und Anwendungen auf die Spezialfälle des Riemannschen V_3 und S_n ($= V_n$ mit konstanter Krümmung). *Hlavatý* (Praha).

Delsarte, J.: Sur les ds^2 binaires et le problème d'Einstein. J. Math. pures appl., IX. s. 13, 19—67 (1934).

The author considers the solutions of Einstein's field equations for a particular space $dS^2 = \varphi^2 ds^2 + f^2 d\sigma^2$, where $ds^2, d\sigma^2$ are the metrics for a p -space and q -space respectively and φ is a function of the variables in $d\sigma$ while f is a function of the variables in ds , $p+q$ being the dimensionality of dS . He proves that if neither φ nor f reduces to a constant there is no solution of the field equations if $p+q$ is sufficiently small, in particular if $p+q=4$. He then considers the different possibilities in the case $f=1$ and is mainly concerned with the physical interpretation of the different solutions among which are the Einstein spaces. The geometrical point of view reduces the problem to finding solutions of the field equations which are conformal to a binary $dS^2 = ds^2 + d\sigma^2$, the factor of conformality F satisfying the equations $\frac{\partial^2 \log F}{\partial \alpha^i \partial v^a} = 0$.

M. S. Knebelman (Princeton).

Slebodzinski, W.: Sur les formes différentielles tensorielles et le théorème de Poincaré. Mathematica, Cluj 8, 86—97 (1934).

Die Integrabilitätsbedingungen der Gleichung $V_\mu^\nu = \Gamma_\mu v^\nu$ (1) in einem krümmungslosen Raume lauten

$$\nabla_{[\omega} V_{\mu]}^\nu - S_{\omega\mu}^\alpha V_\alpha^\nu = 0, \quad (S_{\omega\mu}^\alpha = \Gamma_{[\omega\mu]}^\alpha). \quad (2)$$

Weil aber

$$\delta V_{\mu}^\nu dx^\mu = d x^\mu \delta V_{\mu}^\nu = d x^\mu \delta V_{\mu}^\nu$$

so ist (2) mit $\delta V_{\mu}^\nu dx^\mu = 0$ äquivalent. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist auch $\delta p^\nu = 0$ für $p^\nu = \delta v^\nu$ und außerdem) läßt sich nach (1) $V_{\mu}^\nu dx^\mu$ dem Vektor p^ν gleichsetzen. Analoge Sätze gelten für Größen, die dx in höherem Grade enthalten.

Hlavatý (Praha).

Palatini, A.: Sui tensori a divergenza unica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 534—537 (1933).

Von einem kontravarianten Tensor m -ter Ordnung kann man m Divergenzen ableiten, indem man den Index der kovarianten Ableitung mit den oberen Indizes verjüngt. Sind alle diese Divergenzen gleich, so heißt der Tensor mit einziger Divergenz. I. Doubnoff (Rendiconti Lincei VI 17, 507; dies. Zbl. 7, 33) hat für $m=2$ bewiesen, daß ein Tensor mit einziger Divergenz die Summe eines symmetrischen Tensors 2. Ordnung und der Divergenz eines schiefsymmetrischen Tensors 3. Ordnung ist, beide willkürlich. Verf. verallgemeinert diesen Satz für den Fall $m=3$. Sein Beweis gilt für den Fall, daß das lineare homogene System

$$\sum_{h,k,q} a_{hk,iq} Y^{hkq} = 0$$

eine einzige Lösung Y^{hkq} habe. Diese Voraussetzung bedingt aber die Riemannschen Symbole $a_{hk,iq}$, was die Allgemeinheit des Resultates vermindert. *R. Mattioli*.

Palatini, Attilio: Concetto di vettore generalizzato prodotto interno, prodotto esterno, divergenza e rotore. Teoremi generali della divergenza, del rotore e di Stokes. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 4, 122—139 (1933).

Der Verf. untersucht die p -Vektoren ($p=1, \dots, n$) in einem Riemannschen n -dimensionalen Raume, indem er für solche p -Vektoren und für die — mit diesen verbundenen — elementaren algebraischen und analytischen Operationen eigene Namen einführt. Die Arbeit wird mit dem Stokesschen Satze beendet. *Hlavatý* (Praha).

Kawaguchi, Akitsugu: The foundation of the theory of displacements. II. (Application to the functional manifolds.) Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 45—48 (1934).

In der ersten Arbeit desselben Titels (dies. Zbl. 8, 34) hat der Verf. eine allgemeine Grundlage für die Übertragungslehre begründet. Diese Resultate wendet er jetzt auf zwei Gebiete an. Erstens untersucht er die Übertragungslehre im Funktionenraume. Mit Hilfe von vier Postulaten gelingt es ihm, in diesem Raume einen sehr allgemein begründeten Begriff der Übertragung einzuführen, der auch die von anderen Autoren (Moisil, Michal und von dem Verf. selbst) eingeführten Begriffe als Spezialfälle enthält. Zweitens gibt er in einem n -dimensionalen Raume eine solche Übertragung an, welche eine direkte Verallgemeinerung der Übertragung von Wundheiler [Kovariante Ableitung und die Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen. Math. Z. 36, 104—109 (1932); dies. Zbl. 5, 25] und Hlavatý [Über eine Art der Punktkonnexion. Math. Z. 38, 135—145 (1933); dies. Zbl. 8, 33] darstellt. Hlavatý (Praha).

Hokari, Shisanji: Über die Bivektorübertragung. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 2, 103—117 (1934).

Two affine connections for the parallel displacements of covariant and contravariant bivectors are defined and the corresponding curvature tensors are obtained.

M. S. Knebelman (Princeton).

Veblen, Oswald, and A. H. Taub: Projective differentiation of spinors. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 20, 85—92 (1934).

Verff. führen zunächst in üblicher Weise die Komponenten des projektiven Zusammenhanges $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$ sowie diejenigen des Spin-Zusammenhangs Γ_{α} (letztere Matrizen) ein. Ferner wird die Vertauschbarkeit der kovarianten Differentiation 1. mit dem Übergang zum konjugiert-komplexen, 2. mit dem Übergang von den punktierten zu den nichtpunktierten Indizes und 3. mit dem Heben und Senken der Indizes gefordert. Aus diesen Forderungen entspringen Gleichungen, die im Prinzip mit den bekannten Gleichungen der Spinoranalysis zusammenfallen. Es wird die Kompatibilität dieser Gleichungen nachgewiesen. V. Fock (Leningrad).

Agostinelli, Cataldo: Sullo spostamento conforme in una varietà V_n . Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 523—535 (1933).

In einem n -dimensionalen Riemannschen Raume V_n denkt man sich längs einer beliebigen Kurve $C(t)$ n linear unabhängige orthogonale Einheitsvektorfelder $\overset{a}{u}(t)$ gegeben. Mit $\overset{a}{u}(P)$ bzw. $\overset{a}{u}(Q)$ sollen die Felder in zwei beliebigen Kurvenpunkten P, Q bezeichnet werden, und $\overset{b}{v}(Q)$ soll den Vektor in Q vorstellen, der aus $\overset{a}{u}(P)$ mittels paralleler Verschiebung längs $C(t)$ entsteht. Dann läßt sich bekanntlich die erste Krümmung des Feldes $\overset{a}{u}$ in P mittels des — auf den Winkel von $\overset{a}{u}(Q)$ und $\overset{b}{v}(Q)$ ausgeübten — Limitierungsverfahren (für $Q \rightarrow P$) definieren. (Für alle Krümmungen wird dies in der Monographie des Ref. „Les courbes de la variété générale à n dimensions“, Mém. Acad. Sci. Paris, Fasc. LXIII durchgeführt.) Der Verf. untersucht außerdem den Winkel von $\overset{a}{u}(Q)$ und $\overset{b}{w}(Q)$, wo $\overset{b}{w}(Q)$ aus $\overset{b}{u}(P)$ mittels der Parallelverschiebung von P nach Q und „Drehung“ entsteht. Aus der leicht zu berechnenden Formel für diesen Winkel lassen sich einerseits einige interessante Sätze (z. B. über die Konstanz des betrachteten Winkels) ablesen, andererseits kann auch diese Formel zur Einführung des Begriffes der „Krümmung“ von $\overset{a}{u}$ „in bezug“ auf $\overset{b}{v}$ benutzt werden. Die Definition bedient sich auch, wie im obigen Falle, des Limitierungsverfahrens. Hlavatý (Praha).

● **Cartan, E.: Les espaces de Finsler. (Actualités scient. et industr. Nr. 79. Exposé de géométrie. Publiés de E. Cartan. II.)** Paris: Hermann & Cie. 1934. 42 S. Frcs. 12.—.

This pamphlet is divided into fourteen sections, the first seven being devoted to the foundational postulates and their consequences. Since the geometry is that of a linear element (élément d'appui) there are two connections, one for the absolute

change of the center (x) and one for direction (x'). Then the author applies his tensor calculus to the problems of classical differential geometry of curves and surfaces, discusses the angular metric of Landsberg and compares the geometry of Finsler spaces with that in which a surface element is the basic quantity. The last section deals with special problems some of which do not arise in the geometry of Riemann spaces.

M. S. Knebelman (Princeton).

● **Delens, P.:** *La métrique angulaire des espaces de Finsler et la géométrie différentielle projective.* (Actualités scient. et industr. Nr. 80. Exposés de géométrie. Publiés de E. Cartan. III.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 39 S. Frcs. 12.—

The first chapter is concerned with the invariant differential forms of a Finsler space, primarily with the angular metric. The next two sections deal with the properties of this angular metric obtained by means of the affine indicatrix and the tensor invariants of the form. The fourth section is concerned with the projective and the last with the conformal ones. The pamphlet closes with some special problems.

M. S. Knebelman (Princeton).

Haimovici, M.: *Sur les espaces généraux qui se correspondent point par point avec conservation du parallélisme de M. Cartan.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1105—1107 (1934).

Given two Finsler spaces; under what conditions do they have the same parallelism (in the sense of Cartan)? It is shown that if for one space $ds^2 = \sum_i f_i(x^{i-1+1}, \dots, x^{i_i}; dx^{i-1+1}, \dots, dx^{i_i})$ then for the other $ds^2 = \sum c_i f_i$ where the c 's are constants. The proof is not convincing.

M. S. Knebelman (Princeton).

Astronomie und Astrophysik.

Silva, Giovanni: *La legge di Lambert sulla curvatura della traiettoria apparente geocentrica di un pianeta.* Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 959—964 (1933).

Martin, Ettore: *Su alcuni metodi analitici per il calcolo d'orbita di una binaria visuale.* Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 171—178 (1933).

Picart, Luc: *Sur le calcul des orbites des étoiles doubles visuelles.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 867—870 (1934).

Anwendung der Laplaceschen Methode auf die Bahnbestimmung von Doppelsternen. Als Ausgangsdaten werden benützt die rechtwinkligen Koordinaten der Projektion einer Doppelsternposition auf die Sphäre, sowie die zeitlichen Ableitungen dieser Größen.

A. Klose (Berlin).

Barbier, D.: *Sur l'excentricité des étoiles doubles à très longue période.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 151—153 (1934).

Supposing that the various values of the mean anomaly are equiprobable H. N. Russell finds the mean hypothetical e for the long period binaries in the following way.

For each value of $\eta = \frac{e^2}{1 - e^2}$ Russell derives the theoretical distribution law of the variable ω which is the cotang. of the angle between the tangent to the orbit and the projection of the radius vector on the plane tangential to the celestial sphere. As soon as this distribution law $\lambda_\eta(\omega)$ is known, its comparison with that derived from the data of observations gives η and e , which is the mean excentricity of the binaries under consideration. The author of this paper uses the following method. Let $\varphi(\eta)$ be the

distribution law of η and $\lambda(\omega)$ that of ω . Then $\lambda(\omega) = \int_0^\infty \varphi(\eta) \lambda_\eta(\omega) d\eta$. Decomposing this integral equation into finite sum it is possible to derive from the observations not only numerical table for $\varphi(\eta)$ but also the mean e . For 183 long period binaries the author finds $\bar{e} = 0,686$. Instead of ω one may use other variables and determine their distribution laws. The author derives the corresponding formulae for the variables

$\sigma = 1 - \rho''/\theta \rho'^2$ and $\tau = 4\bar{w}^2 M \bar{w}^3/\rho^3 \theta'^2$ (M being the mass and \bar{w} -the parallax). He does not however use his formulae for practical computations. *Gerasimovič.*

Hnatek, A.: Über die Verteilung der effektiven Temperaturen und Leuchtkräfte unter den Milneschen Sternmodellen. *Astron. Nachr.* **251**, 241–250 (1934).

Verf. behandelt die von Milne untersuchten Sternmodelle mit entartetem Kern [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **91**, 4 (1930) und **92**, 610 (1932); dies Zbl. **4**, 421]. Milne hat gezeigt, daß ein entarteter Kern verschwindend kleiner Opazität bei genügend großer Sternmasse in eine gasförmige Hülle, die nach einer „zentralverdichteten“ Lösung aufgebaut ist, eingepaßt werden kann. Verf. berechnet nach den Milneschen Gleichungen die Leuchtkraft und die effektive Temperatur von nach diesen Modellen aufgebauten Sternen als Funktion der Masse und eines zweiten Parameters, der den Grad der Zentralverdichtung mißt, unter der Voraussetzung, daß die Opazität der äußeren Hülle für alle Sterne dieselbe ist. Er kann nun die Wanderung eines Sternes vorgegebener Masse im Russell-Diagramm bei Änderung des Verdichtungsparameters untersuchen. Ein Zusammenhang mit der beobachteten Sternverteilung im Russell-Diagramm ist nicht vorhanden. Verf. berücksichtigt nicht die Feststellung Chandrasekhars [Z. Astrophys. **5**, 321 (1932); vgl. dies. Zbl. **6**, 37], daß für die hier fast ausschließlich in Frage kommenden Massen oberhalb des Milneschen Grenzwerts die den Modellen zugrunde gelegte Kern-Zustandsgleichung nicht gültig ist. *B. Strömgren.*

Meurers, J.: Der Absorptionskoeffizient $k \sim \rho^\alpha \cdot T^\beta$ in Sternmodellen mit der Weggleichung $T \sim \rho^m$. *Z. Astrophys.* **8**, 102–107 (1934).

In den untersuchten Sternmodellen sei die Weggleichung $T = c_2 \cdot \rho^m$ vorgegeben. Außerdem bestehe für den Absorptionskoeffizienten k keine Beziehung von der Form $k = c_1 \rho^\alpha T^\beta$, worin c_1 , α und β zunächst als unabhängig von r angenommen werden. Setzt man T und k in die Bedingung für Strahlungsgleichgewicht ein, so ergibt sich eine Differentialgleichung, die die Leuchtkraft $L(r)$ als Funktion von r festlegt. Aus dieser Gleichung folgt, daß $L(r)$ dieselbe Funktion von r bleibt, also gegen Änderungen des Absorptionsgesetzes invariant ist, wenn c_1 , c_2 , α , β und m den Bedingungen $c_1^{-1} \cdot c_2^{1-\beta} = \text{konst.}$ und $\alpha + \beta m = 4m - 2 - \text{konst.}$ genügen. Diese Ergebnisse werden im zweiten Teil ausgedehnt auf den Fall, daß die Parameter c_1 , α und β sich mit r ändern. In beiden Fällen werden die analytischen Resultate auf graphischem Wege näher erläutert.

Klauder (Jena).

Wanders, A. J. M.: Die Reduktion für Einstrahlung bei Intensitätsmessungen an Sonnenflecken. *Z. Astrophys.* **8**, 108–117 (1934).

Die Ermittlung des wahren Intensitätsprofils der Sonnenflecken aus dem scheinbaren, durch Lichtzerstreuung in der Erdatmosphäre und der Aufnahmeoptik entstellten Intensitätsverteilung verlangt die Kenntnis der summarischen „Zerstreuungsfunktion“ und die Lösung einer Integralgleichung. Die Zerstreuungsfunktion wird aus dem scheinbaren Randprofil der Sonnenscheibe abgeleitet und ist erwartungsgemäß stark abhängig von der Luftunruhe; zu ihrer Darstellung erweist sich für den vorliegenden Zweck eine Gaußsche Fehlerfunktion als ausreichend. Die numerische Lösung der Integralgleichung wird nach einem von Burgers und van Cittert benutzten Verfahren vorgenommen. Bei stark abgeflachter Zerstreuungsfunktion (hohe Luftunruhe) ist der Nutzen dieses strengen Verfahrens illusorisch und eine schon von Pettit und Nicholson vorgeschlagene angenäherte Methode vorzuziehen.

R. Wildt (Göttingen).

Parehomenko, P.: Verallgemeinerung der Gleichungen der Übertragung der Strahlungsenergie in einer Sternatmosphäre. *Z. Astrophys.* **8**, 118–123 (1934).

The equation of propagation of radiation through an atmosphere is usually given as $\xi \frac{dJ}{d\tau} = J - B$, where J is the total intensity of radiation, B the emission, τ the optical depth, and ξ the cosine of the angle between the ray and the vertical through the atmosphere. This is derived on the assumption that the coefficient of

absorption is independent of the wave-length. When this is not the case the author shows that the equation may be put in the form $\xi \frac{\partial \bar{J}}{\partial \tau_{\mu}} = \alpha \bar{J} - B$, where \bar{J} is the total intensity over any range of wave-length. He gives the formal definitions of τ_0 , α which relate them to the dependence of the absorption-coefficient on wave-length.

W. H. McCrea (London).

Rein, Nathaly: On the masses of condensations in dust nebulae. Russ. astron. J. 10, 400—418 u. engl. Zusammenfassung 419—420 (1933) [Russisch].

Struve, Otto: The interstellar cloud of gas. Scientia 55, 1—10 (1934).

Quantentheorie.

Jordan, P., J. v. Neumann and E. Wigner: On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann. of Math. II; s. 35, 29—64 (1934).

Ein r -Zahlsystem ist eine Algebra mit endlicher Basis über dem reellen Zahlkörper mit kommutativer, nicht-assoziativer Multiplikation, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: (1) Aus $a^2 + b^2 + \dots = 0$ folgt $a = b = \dots = 0$; (2) $a^\mu a^\nu = a^{\mu+\nu}$, (3) $(a^2 b) a = a^2 (b a)$. Eig. (2) und (3) sind äquivalent. Teil I: Allgemeine Strukturuntersuchung. Zu jedem Idempotent e ($e^2 = e$) gehört eine Zerlegung des Algebra in 3 Teilräume $N_0 + N_{\frac{1}{2}} + N_1$, die zu den Eigenwerten 0, $\frac{1}{2}$ und 1 des Operators $O_e x = e x$ gehören. (Im assoz. Fall gibt es nur N_0 und N_1). Es gibt immer ein Einselement: $1 x = x$. Jedes r -Zahlsystem ist direkte Summe von einfachen (oder irreduziblen) Systemen. Es gibt eine Zerlegung der Eins in unzerlegbare Idempotenten e_ρ ($\rho = 1, \dots, \gamma$), und zu jeder solchen Zerlegung gibt es eine Zerlegung der Algebra in Teilräume $M^{e\sigma}$ ($0 < \rho \leq \sigma \leq \gamma$), wobei M^{ee} zum Eigenwert 1 von e_ρ und zum Eigenwert 0 der übrigen e_τ gehört, während $M^{e\sigma}$ ($\rho \neq \sigma$) zum Eigenwert $\frac{1}{2}$ von e_ρ und e_σ und zum Eigenwert 0 der übrigen e_τ gehört. $M^{ee} = N_1(e_e)$ besteht nur aus skalaren Vielfachen von e_ρ . $M^{e\sigma}$ ($\rho \neq \sigma$) hat eine Basis (s_1, \dots, s_χ) mit den Rechnungsregeln

$$s_\mu^2 = e_\rho + e_\sigma \quad \text{und} \quad s_\mu s_\nu = 0. \quad (\mu \neq \nu)$$

[In Formel (20) steht versehentlich $e_\mu + e_\nu$ statt $e_\rho + e_\sigma$.] Weiter gilt $M^{e\sigma} M^{\tau\nu} = 0$ für $\rho, \sigma \neq \tau, \nu$ und $M^{e\sigma} M^{\sigma\tau} \subset M^{e\tau}$. — Teil II führt die Spuren ein: $Sp(a)$ ist die Spur der Transformation $O_a x = a x$, multipliziert mit einer Zahl A , die für einfache Algebren so gewählt werden kann, daß $Sp(e) = 1$ für jedes unzerlegbare Idempotent e . Jedes Idempotent e ist Summe von unzerlegbaren Idempotenten, deren Anzahl gleich $Sp(e)$. a und b heißen vertauschbar, wenn $O_a O_b = O_b O_a$. Sätze über die mit einem Element vertauschbaren Elemente und über die Struktur des Zentrums. — In Teil III werden alle einfachen r -Zahlsysteme bestimmt. Es gibt nur: 1. den reellen Zahlkörper \mathbb{R} ; 2. die Systeme $\mathfrak{S}_N = (1, s_1, \dots, s_{N-1})$ mit $s_\mu^2 = 1$, $s_\mu s_\nu = 0$ ($N = 3, 4, 5, \dots$); 3. die Systeme \mathfrak{M}_γ^χ ($\gamma \geq 3$, $\chi = 1, 2, 4$) der Hermiteschen Matrizes vom Grade γ , deren Elemente reelle Zahlen, komplexe Zahlen oder Quaternionen sind, wobei als Multiplikation die Bildung $\frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A)$ genommen wird; 4. das System \mathfrak{M}_3^3 der Hermiteschen Matrizes vom Grade 3, deren Elemente die „Cayleyschen Zahlen“ oder Quasiquaternionen sind, mit derselben Multiplikationsvorschrift $\frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A)$.

van der Waerden (Leipzig).

Albert, A. Adrian: On a certain algebra of quantum mechanics. Ann. of Math., II. s. 35, 65—73 (1934).

Es wird bewiesen: 1. Die von Jordan, Neumann und Wigner entdeckte Algebra \mathfrak{M}_3^8 (s. vorstehendes Referat) erfüllt wirklich die dort gestellte Bedingung (3). 2. Die Algebra \mathfrak{M}_3^8 läßt sich (im Gegensatz zu allen anderen obengenannten Algebren) nicht aus einer assoziativen Algebra erhalten durch die Festsetzung

$$xy = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x),$$

wo $x \cdot y$ die assoziative Multiplikation sein soll.

van der Waerden (Leipzig).

Waller, I.: Über die Rückwirkung der Strahlung bei der Streuung durch freie Elektronen. Z. Physik 88, 436—448 (1934).

Es wird der Einfluß der Strahlungsrückwirkung auf die Streuung freier Elektronen nach der Diracschen Strahlungstheorie berechnet. Die Rechenmethode ist dieselbe, die von Weisskopf und Wigner zur Berechnung der natürlichen Linienbreite verwendet wurde [Z. Physik 63, 54 (1930)] und die in natürlicher Weise gestattet, jenen Teil der Rückwirkung wegzulassen, der zu den Paradoxien der unendlichen Selbstenergie führt. Dies wird sowohl für die unrelativistische Streuformel als auch für die Klein-Nishina-Formel durchgeführt. Im ersten Fall erhält man, wie zu erwarten, ein Dämpfungsglied, das identisch ist mit dem auf Grund der klassischen Theorie berechneten. Wie der Verf. in der Einleitung betont, ist die Rechnung ein Verfahren, das das Dämpfungsglied nach Potenzen von d/λ entwickelt, wobei d der Elektronenradius und λ die Wellenlänge des gestreuten Lichts ist und nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt. Die praktische Bedeutung des Resultats ist gering, da in der Intensität der Streustrahlung die Glieder erster Ordnung nur quadratisch eingehen und daher die Glieder zweiter Ordnung nicht weggelassen werden dürften. *Weisskopf.*

Sevin, Émile: Sur l'action réciproque des ondes et des particules dans un champ constant. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1309—1311 (1934).

Extension of the author's previous considerations (this Zbl. 8, 38) to the case of particles moving in an electromagnetic field which is independent of the time. *McCrea.*

Born, M., and L. Infeld: Foundations of the new field theory. Proc. Roy. Soc. London A 144, 425—451 (1934).

Vom Standpunkt der allgemeinen Kovarianz der Relativitätstheorie wird eine neue Begründung für die von Born (dies. Zbl. 8, 138) entwickelte Modifikation der Maxwellschen Theorie gesucht. Es werden die Erhaltungssätze für Energie und Impuls entwickelt, die Lösung für ein statisches Elektron gegeben und die Bewegung einer Ladung in einem äußeren Feld betrachtet, wobei nicht die punktförmige „wahre“ Ladung sondern die kontinuierlich verteilte „freie“ Ladung sich als maßgebend zeigt. Aus dem letzten Umstand folgt, daß die Kraft einer Lichtwelle auf ein Elektron für Wellenlängen von der Größenordnung des Elektronenradius wesentlich vermindert wird.

O. Klein (Stockholm).

Jordan, P.: Die Bornsche Theorie des Elektrons. Naturwiss. 22, 214—218 (1934).

Nach einer Besprechung derjenigen Schwierigkeiten für die Weiterentwicklung der Elektrodynamik, die mit der unendlichen Selbstenergie des Elektrons zusammenhängen, gibt der Verf. eine Übersicht über die neue von Born vorgeschlagene Modifikation der Maxwellschen Theorie, die seiner Meinung nach die Lösung der fraglichen Schwierigkeiten bringt.

O. Klein (Stockholm).

Bronstein, M.: Zur relativistischen Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 388—390 u. dtsh. Text 390—392 (1934) [Russisch].

In Anschluß an eine Arbeit von Bohr und Rosenfeld (dies. Zbl. 8, 138) werden einige Überlegungen über die Minimalwerte der Unbestimmtheiten bei Feldstärkemessungen mitgeteilt.

O. Klein (Stockholm).

Flint, H. T.: A relativistic basis of the quantum theory. Proc. Roy. Soc. London A 144, 413—424 (1934).

Loève, Michel: Sur les moyennes de la théorie de Dirac. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1303—1305 (1934).

Bemerkungen über Erwartungswerte der Operatoren in der Diracschen Theorie des Elektrons im Zusammenhang mit der Schrödingerschen „Zitterbewegung“. *Fock.*

Placinteanu, Ioan I.: Une interprétation ondulatoire pour la „condition de la fréquence“ quantique de Bohr. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 219—222 (1933).

Es wird ein Zusammenhang gesucht zwischen der vom selben Verf. früher gegebenen Darstellung der Zusammensetzung der Spingrößen verschiedener Teilchen (dies. Zbl. 7, 234) und der Bohrschen Frequenzbedingung.

O. Klein (Stockholm).

Sexl, Theodor: Über eine einfache Methode zur Bestimmung von Spin und Statistik des Deutons. *Naturwiss.* 22, 205 (1934).

Auf Grund einer von demselben Verf. (vgl. dies. Zbl. 6, 140) gegebenen Verallgemeinerung eines bekannten Resultats von Mott über den Zusammenstoß von Teilchen, welche der Boseschen Statistik genügen, wird auf die Möglichkeit hingewiesen, den Spin und die Statistik beliebiger Teilchen, etwa Deutonen, mittels Streuversuchen zu bestimmen.

O. Klein (Stockholm).

● **Brogie, Louis de:** *L'électron magnétique. (Théorie de Dirac.)* Paris: Hermann & Cie. 1934. VIII, 315 S. Frs. 100.—.

Nach einer kurzen und übersichtlichen Darstellung der älteren Quantentheorie und der experimentellen Fakten, die zuerst zu ihrer Aufstellung führten, zu deren Erklärung sie aber dann nicht ausreichte, wird eine wiederholende Zusammenfassung der nichtrelativistischen Quantenmechanik gegeben, sowie der Schwierigkeiten, auf die ihre Verallgemeinerung im relativistischen Gebiet stieß. Lösung dieser Schwierigkeiten durch die Diracsche Gleichung, und deren Zusammenhang mit der Uhlenbeck-Goudsmitschen Spinhypothese. Diskussion der mathematischen und Invarianzeigenschaften der Diracschen Gleichung. Anwendung auf die Wasserstoff-Feinstruktur, sowie auf die Landésche Formel. Beziehung von Spin- und Bahnmoment zueinander. Schrödingersche Zitterbewegung, Rolle der negativen Zustände. Kritik der Theorie.

R. Peierls (Manchester).

Rutherford, E.: The new hydrogen. *Scientia* 55, 341—349 (1934).

Jones, H., and C. Zener: A general proof of certain fundamental equations in the theory of metallic conduction. *Proc. Roy. Soc. London A* 144, 101—117 (1934).

Für drei in der Metalltheorie wichtige Sätze über die Bewegung von Elektronen in einem periodischen Feld, die nach Ansicht der Verf. in der Literatur nicht mit hinreichender Strenge bewiesen sind, werden vollständige Beweise gegeben. Die Sätze betreffen 1. den Zusammenhang zwischen Wellenzahl, Energie und Gruppengeschwindigkeit (mittlerer Geschwindigkeit), 2. die Wirkung eines elektrischen Feldes, und 3. die Wirkung eines magnetischen Feldes auf ein Elektron.

R. Peierls (Manchester).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Wessel, Walter: Zur mathematischen Behandlung des elektrostatischen Feldes in Isolatoren. (17. Tag. d. Gauver. Thüringen-Sachsen-Schlesien d. Dtsch. Physk. Ges., Halle a. S., Sitzg. v. 8.—9. I. 1934.) *Physik. Z.* 35, 181—184 (1934).

Das Problem der Bestimmung des elektrostatischen Feldes aus der Verteilung der „wahren“ Ladungen bei Gegenwart von dielektrischen Körpern wird direkt (d. h. von physikalischen Vorstellungen ausgehend und ohne Benutzung der Laplaceschen Gleichung) auf eine lineare inhomogene Integralgleichung zurückgeführt. Die Methode, die im Prinzip auch für inhomogene Dielektrika anwendbar ist, führt in einfacheren Fällen leichter zum Ziele als die Lösung der Laplaceschen Gleichung mit entsprechenden Randbedingungen.

V. Fock (Leningrad).

Försterling, K.: Wellenausbreitung in Kristallgittern. *Ann. Physik, V. F.* 19, 261 bis 289 (1934).

Verf. untersucht die Ausbreitung der Lichtwellen in einem Medium, dessen Dielektrizitätskonstante von der Form $\varepsilon = \varepsilon_0 + \eta(x, y, z)$ ist, wo η als sehr klein und räumlich dreifach periodisch angenommen wird. Die an den Inhomogenitäten einmal und zweimal gestreute Welle wird berechnet. Analoge Betrachtungen werden dann auf Schrödingersche Elektronenwellen angewandt, wobei aber die Schrödingergleichung leider nicht ganz richtig, nämlich mit der zweiten Ableitung nach der Zeit geschrieben wird. Bei der Gegenüberstellung der Licht- und der Elektronenwellen tritt der Zusammenhang der von Kirillow und Kasterin 1911 an Lippmannschen Farben-

platten beobachteten anomalen Dispersion mit der aus der Wellenmechanik gefolgerten Lücke im Energiespektrum der Elektronenwellen in Metallen zutage.

V. Fock (Leningrad).

Maggi, G. A.: Complementi alla nota: Riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche di forma qualsivoglia ad una superficie piana. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 11—12 (1934).

Maggi, G. A.: Nuovi complementi alla nota: Riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche di forma qualsivoglia ad una superficie piana. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 128—129 (1934).

Sona, L.: Sul problema della riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 159—160 (1934).

Reulos, René: Sur un nouveau procédé d'intégration de l'équation des ondes électromagnétiques et son application à la physique de l'électron. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1015—1018 (1934).

L'auteur propose un procédé d'intégration des équations de Maxwell qui fait usage d'une suite infinie des équations aux dérivées partielles. Il en déduit des formules pour le champ d'une charge ponctuelle en mouvement; les résultats se raccordent avec ceux de la théorie ordinaire pour le mouvement uniforme mais pas pour le mouvement accéléré.

V. Fock (Leningrad).

Reulos, René: Comment retrouver les lois de l'électrodynamique à partir de certaines solutions de l'équation des ondes électriques. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1137 bis 1139 (1934).

Haag, J.: Sur le calcul des oscillations mécaniques ou électriques. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 693—695 (1934).

Das mechanische Problem der kleinen Schwingungen mit Reibung (lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten) wird einer Behandlung unterworfen, die dessen Analogie zum Problem der elektrischen Schwingungen hervorhebt. Aus der kinetischen und potentiellen Energie und der Rayleighschen „dissipativen Funktion“ wird eine komplexe quadratische Form gebildet, welche die Schwingungsfrequenz als Parameter enthält; das Nullsetzen der Diskriminante ergibt die Eigenfrequenzen. Diese quadratische Form, vom Verf. „quadratische Impedanz“ genannt, wird als metrische Fundamentalform behandelt. Unter Einführung der Bezeichnungen des Tensorkalküls werden einige die Theorie der Schwingungen betreffende Sätze formuliert.

V. Fock (Leningrad).

Brainerd, J. G.: Inductance at high frequencies and its relation to the circuit equations. Proc. Inst. Radio Engr. 22, 395—401 (1934).

From an important paper by J. R. Carson [Bell Syst. Techn. J. 6, 1 (1927)] it is known, how the familiar equations of circuit theory may be derived from the general equations of the electromagnetic field. In the present paper this line of thought is spun one step farther. Besides deriving the circuit equation a first correction term of the reactance is given, which becomes important at the higher frequencies. This correction term is shown to be proportional to the square of the frequency. *Strutt.*

Niessen, K. F.: Über die entfernten Raumwellen eines vertikalen Dipolenders oberhalb einer ebenen Erde von beliebiger Dielektrizitätskonstante und beliebiger Leitfähigkeit. Ann. Physik, V. F. 18, 893—912 (1933).

The field from a vertical dipole on a plane earth has already been discussed by B. van der Pol and the present writer (cf. this Zbl. 2, 222). In this paper the writer derives an approximate formula for the case when the dipole is above the earth. This formula has already been derived by H. Weyl [Ann. Physik, IV. F., 60, 481 (1919)], T. L. Eckersley [J. Inst. Electr. Eng. 65, 600 (1927)] and W. H. Wise [Bell Syst. Techn. J. 8, 662 (1929)]. It was also deduced by B. van der Pol by transforming expressions with Bessel functions and using analytic approximations (cf. this Zbl. 1,

295). The present writer uses a method based on Green's integral theorem and the approximations used are of geometrical rather than analytical type. An error term is found which allows the region of validity of the formula to be defined. The paper concludes with some numerical examples. *Mary Taylor* (Slough).

Peretti, G.: Correnti nei conduttori ed onde associate. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 547—552 (1933).

This paper considers the system of equations governing electromagnetic phenomena in a system of (1) two and (2) n parallel linear conductors; the characteristic determinant, giving the velocity of waves along the conductors, is written down and solved in case (1). *Mary Taylor* (Slough).

Graffi, D.: Sulla teoria matematica della propagazione delle onde radiotelegrafiche. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 19—103 (1933).

This paper considers questions of the existence and convergence of solutions of the differential equations and boundary conditions for the propagation of electromagnetic waves in a composite medium consisting of (1) a plane earth, (2) the lower atmosphere, (3) an ionized layer in which the electromagnetic constants are continuous functions of the height and (4) an unionized space above. The solutions considered are in the form of integrals of the type found by Sommerfeld [Ann. Physik, IV. F. 28, 665 (1909)] but contain unknown functions, due to the unknown distribution of ionization in (3). The cases of waves from vertical and horizontal electric and magnetic dipoles are considered and the solutions are found to exist and be satisfactorily convergent for all cases of physical significance. *Mary Taylor* (Slough).

Wise, W. H.: Propagation of high-frequency currents in ground return circuits. Proc. Inst. Radio Engr. 22, 522—527 (1934).

In Abweichung der bekannten Arbeiten von v. Hörschelmann, Carson und Pollaczek über die gegenseitige Induktion paralleler und parallel zur Erde ausgerichteter wechselstromführender Drähte läßt Verf. die Annahme vernachlässigbarer Verschiebungsströme fallen. Es handelt sich dann mathematisch um die Auswertung des folgenden Integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i k R_1}}{R_1} - \frac{e^{-i k R_2}}{R_2} + \int_0^{\infty} \frac{2 J_0(\rho \nu)}{l + m} e^{-\omega l \nu} d\nu \right) e^{-\gamma x} dx,$$

wofür sich unter gewissen einschränkenden Bedingungen numerisch verwertbare Ausdrücke ableiten lassen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Strutt, M. J. O.: Berechnung des hochfrequenten Feldes einer Kreiszyinderspule in einer konzentrischen leitenden Schirmhülle mit ebenen Deckeln. Hochfrequenz-techn. u. Elektroakust. 43, 121—123 (1934).

Als Randbedingung wird angesetzt, daß die magnetische Feldstärke am Innenrand der Schirmhülle dem Rand parallel ist, was bei hohen Frequenzen erfüllt ist. Das Magnetfeld (letzten Endes die Selbstinduktion) wird aus dem Vektorpotential berechnet; die Differentialgleichung für das Vektorpotential läßt sich mit Hilfe einer Greenschen Funktion Q lösen. Q ergibt sich aus der Entwicklung nach Eigenfunktionen zunächst in Form einer Doppelreihe nach Besselfunktionen J , die aber mit Hilfe der Formel

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(m + \frac{1}{2})(x - \pi)}{\mathfrak{E}^2 + (m + \frac{1}{2})^2} = \frac{\pi}{2 \mathfrak{E}} \frac{\mathfrak{S} \sin \mathfrak{S} x}{\mathfrak{U} \mathfrak{U} \mathfrak{S} \pi}$$

auf eine einfache rasch konvergierende Reihe zurückgeführt wird. *Bechert*.

● **Gutton, C.: Les lignes téléphoniques.** Mém. Sci. math. Fasc. 25, 49 S. (1934).

Cremer, Lothar: Vierpoldarstellung und Resonanzkurven bei schwingenden Stäben. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 1, 2—24 (1934).

Die linearen symmetrischen „Vierpol“-Gleichungen für die Kräfte und Geschwindigkeiten am Anfang und Ende eines longitudinal schwingenden Stabes werden abgeleitet

unter den üblichen Vernachlässigungen und unter Einführung einer — nach Meßergebnissen — frequenzunabhängigen inneren Reibung (oder komplexen frequenzunabhängigen Elastizität). Die äquivalente Masse, Elastizität und Dämpfungswiderstand der nahe einer Eigenfrequenz geltenden quasistationären Näherung wird in bekannter Weise berechnet. Entsprechend wird der Fall der Transversal- (Biege-) -Schwingungen behandelt, wo es sich um vier Fortpflanzungsgrößen handelt: Linear- und Drehkräfte und -geschwindigkeiten, also die Randgleichungen sich als Achtpol-schemata interpretieren lassen. Im Gegensatz zum Longitudinalfall tritt hier eine (infolge zweier Reibungskomponenten verschiedener Frequenzabhängigkeit komplexe) Dispersion auf. Die Dickenendlichkeit wird vernachlässigt. *Baerwald* (Wembley).

Ingram, W. H.: On the dynamical theory of electrical commutator machines. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **20**, 23—24 (1934).

Es wird nachgewiesen, daß in der Anwendung der Tensoranalysis auf Kommutatormaschinen die Relativgeschwindigkeit zwischen Kommutator und Bürsten dieselbe Rolle spielt wie die Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Koordinatensystems in der Lagrangeschen Form der Bewegungsgleichungen der Dynamik. Die Ausführungen stützen sich auf eine frühere Arbeit des Verf. [J. Franklin Inst. **210**, 330 (1930)] und ein Manuskript von G. Kron „Tensor analysis of rotating machinery“.

E. Weber (New York).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Krutkow, G.: Notiz über die Diffusion im Schwerefelde. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr. **10**, 1425—1429 (1933) [Russisch].

Um die Dichteverteilung $n(x, t)$ einer Lösung, deren Teilchen ein größeres spezifisches Gewicht haben als die Flüssigkeit, unter der Wirkung der Schwere als Funktion der Höhe und der Zeit zu finden, wenn sich die Lösung über einem horizontalen Boden bei $x = 0$ und einer Deckplatte bei $x = l$ befindet, an denen die Teilchen nicht ankleben, muß die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + c \frac{\partial n}{\partial x}$$

unter der Anfangsbedingung

$$n(x, 0) = \varphi(x)$$

und den Randbedingungen

$$D \frac{\partial n}{\partial x} + cn = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l$$

gesucht werden. Die Aufgabe wurde u. a. von Fürth [Z. Physik **40**, 351 (1927)] auf einem etwas umständlichen Wege gefunden. Der Verf. zeigt, daß sich die Lösung einfacher durch Anwendung der Cauchyschen Residuenmethode gewinnen läßt.

Fürth (Prag).

Ornstein, L. S., and W. R. van Wijk: On the derivation of distribution functions in problems of brownian motion. Physica **1**, 235—254 (1934).

Durch Lösung der Differentialgleichung für die Bewegung eines materiellen Teilchens unter der Wirkung gegebener äußerer Kräfte wird in der Mechanik die Lage x und die Geschwindigkeit u des Teilchens als Funktion der Zeit erhalten, wenn die Anfangslage x_0 und die Anfangsgeschwindigkeit u_0 gegeben sind. Im Falle der Brownischen Bewegung tritt zu dieser äußeren Kraft noch die durch die Stöße der Moleküle hervorgerufene Kraft hinzu, die, als Funktion der Zeit betrachtet, statistischer Natur ist. Die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung, der Langevinschen Gleichung, kann daher auch nur statistisch gegeben werden, indem nicht wie oben u und x als Funktionen von t , sondern nur gewisse Funktionen $f(x, u_0, x_0, t)dx$ und $f(u, u_0, x_0, t)du$ angegeben werden, die die Wahrscheinlichkeiten dafür bedeuten, daß bei gegebenem u_0 und x_0 nach der Zeit t die Koordinate x zwischen x und $x + dx$ bzw. die Geschwindigkeit u zwischen u und $u + du$ liegt. Das Problem wird gelöst zunächst für ein freies

Teilchen, dann für ein Teilchen unter Wirkung einer konstanten und einer elastischen Kraft, schließlich auch allgemein einer Kraft, die eine beliebige Funktion der Zeit ist. Zum Schlusse wird auf den bekannten Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Lage und der verallgemeinerten Diffusionsgleichung, der Fokker-Planckschen partiellen Differentialgleichung, hingewiesen, als deren Partikularlösungen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen für die Lage nach Ablauf einer genügend langen Zeit angesehen werden können, und gezeigt, daß sich unter geeigneten Annahmen auch eine solche Gleichung aufstellen läßt, die für beliebig kleine Zeiten gültig ist.

Fürth (Prag).

Planck, Max: Das Prinzip von Le Chatelier und Braun. Ann. Physik, V. F. 19, 759—768 (1934).

Bezeichnen x_1 und x_2 zwei Parameter eines physikalisch oder chemisch veränderlichen Gebildes, die bestimmte Funktionen der auf sie wirkenden „Kräfte“ (im verallgemeinerten Sinne) y_1 und y_2 sind, so besagt das Prinzip von Le Chatelier und Braun, daß die Änderung, welche x_1 durch eine vorgegebene Änderung von y_1 erleidet, einen kleineren Betrag besitzt, wenn y_2 konstant bleibt, als wenn x_2 konstant bleibt. Es wird nun gezeigt, daß dieses Prinzip nur bei bestimmter Wahl der Parameter richtig ist, nämlich nur dann, wenn je einer der beiden Parameter einer der beiden Gattungen der Zustandsgrößen, die als Intensitäts- und Quantitätsgrößen bezeichnet werden, angehört. Gehören beide Parameter zu der gleichen Gattung, so ist die gegenteilige Aussage richtig. Dabei steckt die Definition der beiden Gattungen in der Gleichung

$$\delta E = y_1 \delta x_1 + y_2 \delta x_2$$

(E = Energie des Gebildes): Quantitätsgrößen sind diejenigen Parameter, deren Kräftefunktion mit der Energie des Gebildes zusammenfällt; die dazugehörigen Kräfte sind Intensitätsgrößen. Man darf also nicht, wie es oft geschehen ist, in dem Prinzip den Ausdruck einer gewissen universellen, auf die möglichste Erhaltung eines bestehenden Gleichgewichtszustandes gerichteten Tendenz sehen; vielmehr liegt seine eigentliche Bedeutung darin, daß es den Gattungsunterschied zwischen Quantitäts- und Intensitätsgrößen aufdeckt.

H. Ulich (Rostock).

Dupont, Y.: Thermodynamique invariante des systèmes élastiques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1167—1179 (1933).

Verf. schreibt im Kap. 1 die unrelativistischen dynamischen Gleichungen eines allgemeinen deformierbaren Körpers in einer gegenüber der Wahl der Variablen invarianten Form. Im Kap. 2 werden in entsprechender Form die Gleichungen der Thermodynamik geschrieben, wobei insbesondere die Fälle der mechanischen und chemischen Irreversibilität behandelt werden. Der irreversible Teil der mechanischen Spannungen wird nach Rayleigh den Deformationsgeschwindigkeiten proportional angesetzt.

V. Fock (Leningrad).

Donder, Th. de: L'affinité. Pt. III. VI. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1364—1376 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 8, 93 u. 287.

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Bilimovitch, A.: Sur la possibilité du mouvement séculaire du pôle terrestre. Bull. Acad. Sci. Math. et Nat., Belgrade Nr 1, 1—11 (1933).

Ausgehend von einem vom Verf. früher aufgestellten Satze, daß die Bewegung eines materiellen Systems in zwei Bewegungen zerlegt werden kann, nämlich in die Bewegung des vorgegebenen Systems bezüglich eines passend gewählten virtuellen Systems und die Bewegung des letzteren Systems im festen Raume, wird die Möglichkeit einer säkularen Verlagerung der Erdpole in zwei besonderen Fällen untersucht. Zuerst wird die Wirkung einer Änderung in der Winkelgeschwindigkeit hervorgerufen etwa durch Strömungen im Erdinnern betrachtet, sodann die Wirkung einer Änderung

der Hauptträgheitsmomente der Erde erzeugt durch allmähliche Veränderungen in der Massenverteilung. In beiden Fällen ergeben sich voneinander verschiedene säkulare Verlagerungen der Rotationspole. Zweck des Artikels ist der Nachweis von der Verwendbarkeit des eingangs erwähnten Satzes auf die Theorie der Rotationsbewegung eines materiellen, sich nur wenig von einem festen Körper unterscheidenden, also etwa plastischen Systems. *Hopfner (Wien).*

Milankovitch, M.: Numerische Ausrechnung der säkularen Bahnkurve der Rotationspole der Erde. Bull. Acad. Sci. Math. et Nat., Belgrade Nr 1, 75—83 (1933).

Von der Annahme einer isostatischen Lagerung der Sialdecke der Erde ausgehend, hat der Verf. gezeigt, daß die Rotationspole der Erde im allgemeinen säkularen Verlagerungen unterworfen sind. Die Bahnkurve des Rotationspoles ist eine der Vektorlinien des Feldes grad Ω , unter Ω das Trägheitsmoment der Sialdecke bezüglich der durch den Erdmittelpunkt und den jeweiligen Polort bestimmten Achse verstanden. Alle Vektorlinien des Feldes, die dem durch die drei Trägheitspole der Sialdecke bestimmten Oktanten angehören, gehen durch zwei dieser Trägheitspole hindurch, in denen Ω seine Extremwerte annimmt. In diesen Punkten ist infolgedessen grad $\Omega = 0$, und diese Punkte sind daher Gleichgewichtslagen des Poles. Wie auch immer die säkulare Bahnkurve verlaufen mag, sie enthält diese beiden Punkte. Andererseits liegt der derzeitige Polort auf der säkularen Bahnkurve. Durch die angegebenen drei Punkte ist diese Kurve daher in den Hauptzügen bestimmt. Die zahlenmäßigen Rechnungen werden unter vereinfachenden Annahmen über die Konfiguration der Sialdecke durchgeführt. Indem zunächst die Zeiteinheit unbestimmt gelassen wird, wodurch einer derzeit nicht bestimmbar Konstanten ein geeigneter willkürlicher Wert beigelegt werden darf, wird nach vollzogener Rechnung die Zeiteinheit aus dem Vergleich der Ergebnisse mit geologischen Erkenntnissen bestimmt. Die säkulare Bahnkurve verläuft von den Hawain Inseln über den gegenwärtigen Nordpol und endet bei der Petschoramündung. Unsicherheiten bestehen hinsichtlich des Zeitpunktes für gewisse Pollagen. *Hopfner (Wien).*

Vening Meinesz, F. A.: Gravity and the hypothesis of convection-currents in the earth. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 37—45 (1934).

Bei Schweremessungen auf See sind verschiedene ausgedehnte Felder positiver Anomalien gefunden worden, und zwar sowohl rein ozeanische wie auch solche über tektonischen Becken. Dagegen fehlen sie über solchen Gräben, die anscheinend mit Faltungs- oder Verbiegungsvorgängen der Kruste zusammenhängen. Der Verf. hatte bisher die positiven Anomalien als statische Erscheinungen erklärt, nämlich als Wirkung horizontaler Kompression in der Erdkruste. Diese Erklärung gibt er jetzt auf zugunsten der Hypothese stationärer Konvektionsströmungen in einer Schicht, die von der Unterseite der Kruste bis zur ersten Unstetigkeitsfläche reicht, die nach Erdbebenbeobachtungen in 1200 km Tiefe liegt. Die Strömungen werden durch horizontale Temperaturunterschiede erzeugt (wie etwa die Monsune). Im gleichen Niveau ist es unter den Kontinenten wärmer als unter den Ozeanen; das läßt sich schließen aus den niedrigen Wassertemperaturen am Meeresboden und aus dem höheren Gehalt der kontinentalen Kruste an radioaktiven Substanzen. — Die Theorie der zähen Flüssigkeiten führt unter den gegebenen Bedingungen (große Zähigkeit k , kleine Geschwindigkeit v , Druck p und Temperatur stationär oder langsam veränderlich) zu folgendem einfachem Prinzip: Ein Problem kann als statisch behandelt werden, wenn zu den äußeren Kräften überall eine Kraft $kV^2 v$ pro Volumeinheit hinzugefügt wird. Für die vertikale Koordinatenrichtung y (nach unten positiv) gilt also $\partial p / \partial y = Y + kV^2 v_y$. Der zweidimensionale Fall eines sinkenden Streifens wird durchgerechnet: Breite D des Streifens in der x -Richtung, vertikale Dicke H der Konvektionsschicht, Koordinatenanfang in der Mitte des Querschnitts, wo die maximale Sinkgeschwindigkeit v_m ist; die Sinkgeschwindigkeit v_y verschwindet an den Grenzflächen, entsprechend

$$v_y = v_m [1 - (4x^2/D^2)] [1 - (4y^2/D^2)].$$

Die durchschnittliche Schweranomalie über dem Streifen wird

$$A = (32/3)\pi K^2 k v_m (D^2 + H^2) / g D^2 H,$$

mit der Newtonschen Gravitationskonstante K^2 , Schwerebeschleunigung g . Wie erwartet, wird $A > 0$ (also die Schwere übernormal) über sinkenden Säulen (Ozeane), unternormal über steigenden Zweigen der Konvektionsströmung (Kontinente). Aus

der Geschwindigkeit der Anpassung an das isostatische Gleichgewicht nach der Entlastung Skandinaviens vom Eise wird $k = 3 \cdot 10^{22}$ dyn sec/cm² geschätzt; mit $D = H = 1200$ km ergeben sich die gut zusammenpassenden Werte $A = -0,04$ cm/sec², $v_m = -1$ cm/Jahr. Die Konvektionsströme erzeugen vielleicht auch tangentielle Spannungen in der Kruste. J. Bartels (Eberswalde).

Wadati, K., and S. Oki: On the travel time of earthquake waves. III. Geophys. Mag. 7, 113—137 (1933).

An accurate mean travel time curve of P -wave for epicentral distances less than 100° is determined from three large shallow earthquakes recently occurred in Japan, having almost the same travel time curves, special attentions being paid for obtaining the position of epicenters, the focal depths, and the times of occurrence. The use of large earthquakes makes the errors in the observation to the minimum. The result is somewhat different from those of some authors, but practically coincides with that of Jeffreys. Another large earthquake of deep focus is examined, and it is found, that, after the reduction of the depth of seismic focus is made, the travel time curve is almost the same with those obtained for shallow earthquakes. — From the above result the author concludes that the effect due to the variety in the elastic properties of the earth's crust at the epicenter is negligibly small. He also found that almost all extraordinary large earthquakes are apt to occur in the part of the crust whose depth can be assumed as nil.

Y. Kodaira (Paris).

Wadati, K., and S. Oki: On the travel time of earthquake waves. IV. Geophys. Mag. 7, 139—153 (1933).

An accurate travel time curve of S -wave for epicentral distances less than 100° is determined from the large earthquake of deep focus studied in the preceding paper, the assumption that the ratio of travel times of S - and P -waves T_s and T_p has the constant value $T_s/T_p = 1,794$ in the upper strata of the crust being made for the determination of the curve near the epicenter. The result practically coincides with that of Jeffreys. The use of large earthquake of deep focus is necessary to get an accurate incidence of S -wave. — The velocities of both P - and S -waves calculated by the method of Herglotz-Wiechert using the above result together with that obtained in the preceding paper are also given, which are approximately similar to those already obtained by some authors, and particularly coincident with those obtained by H. Witte. Remarkable discontinuities in the earth's crust are not observed in the velocities here obtained, but there are rapid changes at the depths 800 and 1400 km. for P -wave, and 900 and 2200 km. for S -wave, except the part near the earth's surface. The paths of P - and S -waves are somewhat different from each other, the former passing through deeper layers. The Poisson's ratio is obtained to be approximately constant for all layers of the crust, its value increasing slowly with depth.

Y. Kodaira (Paris).

Arakawa, H.: The propagation of elastic waves in a heterogeneous medium and the condition for the validity of the ray theory. Geophys. Mag. 7, 155—160 (1933).

The author treats the problem of propagation of elastic waves in a heterogeneous medium as in wave mechanics and concludes that the ray theory is valid only when the gradient of velocity or the wave length is so small that the relation:

$$\cos \theta \frac{1}{V} \frac{dV}{dl} L \ll 1$$

holds good, where V is the velocity, L the wave length, dl an element of length in a direction making an angle θ with that of ray at the point under consideration. — As for the earth's crust the ray theory for the propagation of elastic waves is valid in deeper layers where the variation in velocity is small, but it fails in upper layers where the variation is large, especially in the surface layers down to 20 km. Y. Kodaira (Paris).

Honda, H.: Notes on the propagation of the elastic waves generated from a cylindrical origin. Geophys. Mag. 7, 249—256 (1933).

The propagation of elastic waves diverging from a cylindrical origin in an infinite

homogeneous solid subject to the condition that a normal stress acts periodically on the surface of the cylinder is mathematically solved. The radial and axial components of displacement ϑ_π and ϑ_φ are respectively divided into two as follows:

$$\vartheta_\pi = \vartheta_{a\pi} + \vartheta_{d\pi}, \quad \vartheta_\varphi = \vartheta_{a\varphi} + \vartheta_{d\varphi}.$$

The components $\vartheta_{a\pi}$ and $\vartheta_{a\varphi}$ propagate with the velocity of ordinary longitudinal wave, and $\vartheta_{d\pi}$ and $\vartheta_{d\varphi}$ with that of ordinary transverse wave. The amplitudes of $\vartheta_{a\pi}$ and $\vartheta_{d\varphi}$ are proportional to $1/\pi^{\frac{1}{2}}$ at a point remote from the origin, whereas those of $\vartheta_{d\pi}$ and $\vartheta_{a\varphi}$ to $1/\pi^{\frac{3}{2}}$, where π is the distance from the axis of the cylinder. — The values of the amplitude of displacement for some special cases are numerically calculated and are given in tables.

Y. Kodaira (Paris).

Pekeris, C. L.: On the interpretation of atmospheric ozone measurements. Gerlands Beitr. Geophys. **41**, 192–202 (1934).

Die atmosphärische Ozonmenge, die ein Sonnenstrahl auf seinem Wege bis zur Erdoberfläche passiert, ist durch die bekannte Beziehung $N(v) = \frac{1}{2} \int_{R^2}^{\infty} \frac{\varrho(u) du}{\sqrt{u-v}}$ gegeben, worin $u = r^2$ und $v = R^2 \sin^2 z$ sind. Hieraus ergibt sich nach Rosseland [Gerlands Beitr. Geophys. **24**, 50–52 (1929)] die Ozonverteilung zu

$$\varrho(u) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial u} \int_u^{\infty} \frac{N(v) dv}{\sqrt{v-u}}.$$

Die Gültigkeit dieses von H. Mineur [J. Physique Radium **3**, 145 (1932)] kritisierten Ergebnisses wird in der vorliegenden Arbeit durch Untersuchung der Existenzbedingungen einer eindeutigen Lösung diskutiert. Setzt man

$$x = \frac{R^2}{u} = \frac{R^2}{r^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{v}{R^2} = \sin^2 z,$$

so geht die Integralgleichung über in

$$N(y) = \int_0^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-xy}}, \quad \text{wobei} \quad f(x) = \frac{r^2}{2R^2} \varrho(r)$$

ist. Eine Lösung dieser Gleichung hat bereits Picard [Rend. Circ. mat. Palermo **29**, 79 (1910)] gegeben, doch ist hierzu die Auffindung der Eigenfunktionen und Eigenwerte erforderlich, was in der Praxis kaum möglich ist. Der Autor beschreitet daher zwei andere Wege zur Lösung der Gleichung, wobei er auf dem einen einem Vorschlage von G. D. Birkhoff folgt. Die ausgeführte Rechnung läßt sich in ähnlicher Weise auch durchführen, wenn im Ansatz die Wirkung der atmosphärischen Brechung Berücksichtigung findet. Für die praktische Ermittlung der Ozonverteilung dürften diese Untersuchungen indessen zur Zeit nur geringen Wert besitzen, da die Meßwerte, auf die sich das Verfahren stützt, hierfür noch zu ungenau sind. Zum Schluß wird die Möglichkeit diskutiert, die direkte Methode zu atmosphärischen Sondierungen mittels der Sonnenstrahlung zu benutzen.

J. N. Hummel (Göttingen).

Barbier, D.: Remarques théoriques sur la distribution de l'ozone dans l'atmosphère. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1060–1062 (1934).

Die atmosphärische Ozonmenge, die ein Sonnenstrahl auf seinem Wege bis zur Erdoberfläche passiert, ist durch die bekannte Beziehung $N(\varphi) = \int_R^{\infty} \frac{r \varrho(r) dr}{\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}$

gegeben. Nimmt man an, daß das gesamte Ozon sich in einer dünnen Schicht im Abstände D vom Erdmittelpunkt befindet, so vereinfacht sich diese Gleichung zu $N(\varphi) = \frac{ED}{\sqrt{D^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}$, wobei E die gesamte auf einer Lotlinie befindliche Ozonmenge

ist. Solange die Beobachtungen durch diese Gleichung dargestellt werden konnten, wurde man umgekehrt zu dem Schlusse geführt, daß das atmosphärische Ozon tatsächlich in einer vergleichsweise dünnen Schicht angereichert ist. Für neuere Messungen von Gauzit [C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 492 (1934)] gilt dies nun nicht mehr. Zur Deutung seiner Messungen ist die Lösung der Integralgleichung erforderlich. Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varrho(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-D)^2}{2\sigma^2}},$$

ein Ausdruck, der eine Reihenentwicklung gestattet. Ist hierin $\sigma = 0$, so erhält man die obige vereinfachte Gleichung. Der Autor schließt aus den Messungen von Gauzit in Verbindung mit seinen Rechnungen auf eine stark dissymmetrische Verteilung des Ozons im Gegensatz zu Gauzit selbst, der seinerseits, abgesehen von einer dünnen Schicht hoher Konzentration in etwa 50 km Höhe, eine gleichmäßige Verteilung vermutet.

J. N. Hummel (Göttingen).

Jánossy, L.: Zählrohrinvarianten. Z. Physik **88**, 372—388 (1934).

Die durch Höhenstrahlen in einem Geiger-Müller-Zählrohr erzeugte Stoßzahl ist

$$N(\alpha) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} J(\vartheta, \varphi) \{2rl |\sin \gamma| + \pi r^2 |\cos \gamma|\} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Im Gegensatz zu einem von L. Tuwim [S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1931**, Nr 5, 91, Nr 19, 360 und Nr 33, 830; J. Physique Radium (7) **3**, 614 (1932); (7) **4**, 138 (1933) (vgl. dies. Zbl. **1**, 188; **2**, 319; **4**, 143; **6**, 96 u. 383); W. Kolhörster, Naturwiss. **20**, 895 (1932); Nature **129**, 471 (1932); S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1932**, 39 (vgl. dies. Zbl. **4**, 238 u. **5**, 430)] entwickelten Ansatz ist hierbei nichts über das Absorptionsgesetz oder die Richtungsverteilung der Strahlung vorausgesetzt. Die Stoßzahlen in der Vertikallage $N(0)$ und in der Horizontallage $N(90)$ ergeben sich hieraus zu

$$N(0) = 2rl \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} J(\vartheta, \varphi) \sin^2 \vartheta d\vartheta + q \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} J(\vartheta, \varphi) \cdot \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \right\}$$

und

$$N(90) = 2rl \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} J(\vartheta, \varphi) |\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cos^2(\varphi - \varphi_0)}| \sin \vartheta d\vartheta \right. \\ \left. + q \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} J(\vartheta, \varphi) |\cos(\varphi - \varphi_0)| \sin^2 \vartheta d\vartheta \right\}.$$

Die vier bestimmten Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichungen enthalten nichts mehr von den Zählrohrabmessungen, sie sind also im Bezug auf diese Konstante. Ihr numerischer Wert hängt nur von der Form der Funktion $J(\vartheta, \varphi)$, d. h. von der Art der Richtungsverteilung ab. Sie werden als die Zählrohrinvarianten A, B, C, D bezeichnet. Die Stoßzahlen $N(0)$ und $N(90)$ sind als Linearkombinationen der Zählrohrinvarianten darzustellen. In dem Sonderfalle, in dem die Richtungsverteilung rotations-symmetrisch in bezug auf die Vertikale ist, ist die Invariante A gleich der Invarianten D . Aus der Kenntnis der numerischen Werte der Invarianten lassen sich Stoßzahlen vorausberechnen. Die praktische Bedeutung der Theorie der Zählrohrinvarianten liegt vor allem darin, daß Zählrohrmessungen von Rohren mit verschiedenen Abmessungen verglichen und durch den Vergleich ausgewertet werden können. Es wird auf diese Weise insbesondere die Bestimmung der Meßgenauigkeit und die Bestimmung des Null-effektes ermöglicht.

J. N. Hummel (Göttingen).

Millikan, Robert A., Carl D. Anderson and H. Victor Neher: The three types of cosmic-ray fluctuations and their significance. Physic. Rev., II. s. **45**, 141—143 (1934).

Die Schwankungen der Höhenstrahlung werden auf 1. sog. Stöße, 2. sog. Schauer (Mehrfachbahnen), 3. einzelne sog. "electron shots" (Elektronen, Positronen) zurückgeführt. Die Verff. führen Gründe dafür an, daß die mit den Stößen verknüpfte Energie

nicht — wie bisher angenommen wurde — von den Höhenstrahlen selbst, sondern von der Batterie, die den Elektroskop ladet, herrührt. Die Stöße werden somit als bloße Apparateneffekte angesehen. Nach Elimination der durch die Stöße bedingten Schwankungen stimmt die Differenz der beobachteten Schwankungen und der nach Poisson-Bateman berechneten Schwankungen vom Typus 3 sehr gut zu der (von Anderson und Neddermeyer in einer Wilsonkammer gefundenen) Häufigkeit der Schauer. Dies wird in einer mit dieser zugleich erschienenen Arbeit von Evans und Neher [Physic. Rev. II. s. 45, 144 (1934)] genauer ausgeführt. Guth (Wien).

Backer, Simon de: Sur la turbulence de l'air atmosphérique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 125—131 (1934).

Verf. definiert zur Untersuchung der turbulenten Bewegung zwei Arten von zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeit u_i ($i = 1, 2, 3$), Bewegungsgröße V_i , Dichte ϱ und des Druckes p an einem bestimmten Orte x_i und zu einer bestimmten Zeit. Die Definitionen für irgend zwei Größen sind

$$\bar{\varrho A} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \varrho A dt \quad \text{und} \quad \bar{B} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} B dt,$$

τ ist ein kleiner, dem Problem angepaßter Zeitabschnitt. Wird diese Mittelbildung in den hydrodynamischen Gleichungen durchgeführt, so behält die Kontinuitätsgleichung ihre Form, während die Bewegungsgleichungen den Navier-Stokesschen Gleichungen ähnlich werden. (Der Einfluß der Viskosität wird vernachlässigt.) B. Haurwitz.

Fujiwara, S.: On the structure of wind and Robinson's constant. Geophys. Mag. 6, 19—32 (1932).

1. Die durch Auswertung der Registrierungen von Dines-Anemometern erhaltenen Windgeschwindigkeiten genügen mit hinreichender Genauigkeit dem Maxwellschen Verteilungsgesetz. 2. Die Robinsonsche Anemometerkonstante gilt nur für einen laminaren Luftstrom; bei turbulenter Strömung muß sie mit einem „Turbulenzfaktor“ (0,7—0,9) multipliziert werden, wie Verf. mittels einer periodischen Störungsbewegung, die der laminaren Grundströmung superponiert wird, ableitet. H. Ertel (Berlin).

Arakawa, H.: The effect of topography on the direction and velocity of wind. II. Geophys. Mag. 7, 9—18 (1933).

Verf. erweitert seine früheren Untersuchungen über topographische Windbeeinflussung [Geophys. Mag. 5, 63—68 (1932); dies. Zbl. 5, 431], in denen er ein unendlich langes Hindernis voraussetzen mußte, nunmehr auf den Fall eines isolierten Hindernisses in Form eines flachen Halbellipsoids und zeigt, daß auch dann Windgeschwindigkeits- und Häufigkeitszunahme in den zur Achse des (horizontalen) Hindernisquerschnitts senkrechten Richtungen auftritt. H. Ertel (Berlin).

Arakawa, H.: Direction and velocity of wind in the vicinity of wind tower. Geophys. Mag. 7, 19—23 (1933).

Funktionentheoretische Behandlung der Windbeeinflussung eines Turms von rechteckigem Querschnitt (Seitenlängen: a, b ; $a < b$) durch Anwendung der Schwarz-Christoffelschen Abbildung des Polygons auf eine Halbebene. Der Turm bewirkt in seiner Umgebung eine Vergrößerung der Windhäufigkeiten und Zunahme der Geschwindigkeiten in den zur „Querschnittsachse“ b senkrechten Richtungen. Ertel.

Scherhag, R.: Zur Theorie der Hoch- und Tiefdruckgebiete. Die Bedeutung der Divergenz in Druckfeldern. Meteorol. Z. 51, 129—138 (1934).

Leemann, W.: Über die Berechnung der Flächenverzerrung der winkeltreuen, schiefachsigen Zylinderprojektion aus den Projektionskoordinaten. Schweiz. Z. Vermessgswes. 32, 81—84 (1934).

Köhr, Julius: Zur Berechnung des Längen- und Querfehlers in Polygonzügen. Allg. Vermessgsw.-Nachr. 46, 291—294 (1934).